

## ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

**29.** Für  $n \geq 3$  und  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  berechne man alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|^\alpha$$

sowie  $\Delta f(x) := \operatorname{div} \operatorname{grad} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$  und bestimme denjenigen Wert  $\alpha$  (in Abhängigkeit von  $n$ ), für den  $f$  der *Laplace-Gleichung*

$$\Delta f = 0$$

genügt. (Der Operator  $\Delta$  heißt *Laplace-Operator*, die Lösungen der Laplace-Gleichung werden als *harmonische* Funktionen bezeichnet.)

**30.** Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld

$$F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definiert man die *Rotation* von  $F$  durch

$$\operatorname{rot} F := \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

• Zeigen Sie:

(a) Ist  $F$  zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0.$$

(b) Ist  $\phi : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig partiell differenzierbar, so ist

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = (0, 0, 0).$$

• Gesucht ist eine Funktion  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\operatorname{grad} \phi(x) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2).$$

Kann es eine solche Funktion überhaupt geben?

Gibt es ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld  $F$  mit  $\operatorname{rot} F = x$ ?

Bitte wenden!

**31.** Eine differenzierbare Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *konform* in  $x \in \Omega$ , wenn es eine Zahl  $\rho(x) > 0$  gibt, so dass für die Jacobi-Matrix  $Df(x)$  gilt

$$Df(x)^\top Df(x) = \rho(x)^2 E_n$$

wobei  $E_n$  die  $n \times n$ - Einheitsmatrix ist. Die Abbildung  $f$  heißt *konform*, wenn  $f$  in jedem  $x \in \Omega$  konform ist. Zeigen Sie, dass die Inversion

$$i : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto i(x) = \frac{x}{|x|^2}$$

an der Einheitskugel (vgl. Aufgabe 14 (b)) konform ist. Welche Folgerung ergibt sich für den Betrag der Funktionaldeterminante  $\det Di(x)$ ?

**32.** Bestimmen Sie die Richtungsableitungen von

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto xy^2 + x^2z^3 - 3yz$$

im Punkt  $(1, 2, 1)$  in die Richtungen  $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(1, 0, 4)$  und  $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1)$ .

**Abgabe:** Fr., 18.12.2015, 10:25 Uhr

**Besprechung:** Mi., 06.01.2016 und Do., 07.01.2016