Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

WS 2015/2016
18.12.2015
Blatt 9

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

33. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{xy}\,; & xy \neq 0 \\ 0\,; & xy = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

(a) alle Richtungsableitungen von f im Nullpunkt existieren,

(b) die Formel $\dfrac{\partial f}{\partial \xi}(0) = \nabla f(0)\xi$ für f nur in Ausnahmefällen zutrifft,

(c) f im Nullpunkt unstetig ist.

34. Es sei $y\colon (0, \sqrt{2}) \to \mathbb{R},\ x \mapsto y(x)$, eine differenzierbare Funktion, die der Gleichung $F(x, y(x)) = 0$ für

$$F(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^2 - 2(x^2-y^2)$$

genügt. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion y, und entscheiden Sie, in welchen Fällen es sich um ein Maximum beziehungsweise ein Minimum handelt.

Hinweise:

- Es gibt genau zwei solche Funktionen.
- Aus der Gleichung $F(x, y(x)) = 0$ berechne man zunächst mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung $y'(x)$, *ohne* explizit nach y aufzulösen!

35. Für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\times(0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto f(x,y) := y^x$$

berechne man das Taylorpolynom 3. Grades im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$

(a) durch Berechnung aller partiellen Ableitungen bis zur dritten Ordnung einschließlich und anschließende Auswertung in (x_0, y_0),

(b) unter Verwendung der Exponential- und Logarithmusreihen, wobei man alle Beiträge höherer als dritter Ordnung vernachlässige.

Bitte wenden!

36. Gegeben seien Punkte $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$, die ein spitzwinkliges Dreieck

$$\Delta := \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 : \ 0 \leq \lambda_i, \ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1\}$$

bilden. In einem Punkt x im Innern von Δ sei die Summe der Abstände zu den a_i minimal. Zeigen Sie, dass der Winkel zwischen benachbarten Vektoren $a_i - x$ stets $\frac{2\pi}{3}$ beträgt.

Wir wünschen Ihnen ein schönes Weihnachtsfest, einen guten Übergang ins neue Jahr und eine erholsame Ferienzeit!

Abgabe: Fr., 08.01.2016, 10:25 Uhr

Besprechung: Mi., 13.01.2016 und Do., 14.01.2016