Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

WS 2015/2016
08.01.2016
Blatt 10

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

37. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$P(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - 4xy + 9y^2 + 3x - 14y + \frac{1}{2}.$$

(a) Beweisen Sie, dass P genau eine kritische Stelle (x_0, y_0) besitzt, und bestimmen Sie diese.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Taylorschen Formel (*ohne* zusätzliche Grenzwertbetrachtungen), dass in (x_0, y_0) ein isoliertes globales Minimum der Funktion P vorliegt.

38. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema und ihren Typ für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) = xy \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right).$$

In welchen Fällen handelt es sich um globale Extrema?

39. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$P(x,y) = (y - x^2)(y - 3x^2).$$

(a) Berechnen Sie $\nabla P(x, y)$ und zeigen Sie, dass $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt von P ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hess}P(0, 0)$ positiv semidefinit ist und dass in $(0, 0)$ *kein* lokales Extremum vorliegt.

(c) Zeigen Sie, dass für jedes $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ die Funktion $\varphi_h : t \mapsto P(th_1, th_2)$ in 0 ein isoliertes lokales Minimum besitzt.

40. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto f(x,y) = e^x(\cos y, \sin y),$$

vgl. Bsp. 2 in Abschnitt 2.4 der Vorlesung.

(a) Zu $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$ finde man möglichst große Umgebungen U von (x_0, y_0) und V von $f(x_0, y_0)$, so dass $f|_U : U \to V$ bijektiv ist. Geben Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ explizit an.

(b) Dieselbe Aufgabenstellung wie in (a), jedoch mit $(x_0, y_0) = (0, \pi)$.

Hinweis: Lesen Sie ggf. den Satz 1 in Abschnitt 4.3 der Vorlesung zur Analysis I nach.

Abgabe: Fr., 15.01.2016, 10:25 Uhr

Besprechung: Mi., 20.01.2016 und Do., 21.01.2016