Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

WS 2015/2016
15.01.2016
Blatt 11

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

41. Es sei $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$.

(a) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ lokal umkehrbar ist. Ist f als Abbildung von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ in sich global umkehrbar?

(b) Finden Sie eine affine Abbildung, die die lokale Umkehrung f^{-1} in der Nähe von $f(1, -1)$ approximiert.

42. Für $1 \leq i, k \leq n$ seien reelle Zahlen b_i und c_{ik} gegeben, so dass

$$\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}^2 < 1.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass das nichtlineare Gleichungssystem

$$x_i = b_i + \sum_{k=1}^{n} \sin(c_{ik}x_k), \qquad 1 \leq i \leq n,$$

genau eine Lösung besitzt.

43. Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2y_1^2 + y_2^2 &= -4 \\ (x_1 + x_3)^2 + y_1 - y_2 &= -3 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dieses System in einer Umgebung von $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}; y_1^{(0)}, y_2^{(0)}) = (1, \frac{1}{2}, -1; -2, 1)$ nach $y = (y_1, y_2)$ aufgelöst werden kann. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von $y = y(x)$ in $(1, \frac{1}{2}, -1)$.

44. Es sei $C \subset \mathbb{R}^3$ der Durchschnitt des Kegelmantels

$$M_K = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$$

mit der Mantelfläche

$$M_Z = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 1\}$$

eines elliptischen Zylinders. Berechnen Sie den Abstand von C zum Nullpunkt.

Abgabe: Fr., 22.01.2015, 10:25 Uhr

Besprechung: Mi., 27.01.2015 und Do., 28.01.2015