Im folgenden werden wir uns die metrischen Räume be-
wegen, auf die die aus der Analysis I bekannte Begriffe
wie z.B. Konvergenz, Cauchy-Folge, Stetigkeit etc. leicht zu
verallgemeinern sind.

1.3 Folgen und Grenzwerte. Stetigkeit

Def.: Eine Folge (a_n) mit Werten in einem metrischen
Raum (X, d) heißt

(a) konvergent gegen $a \in X$, falls gilt:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodaß $\forall n \geq N$ gilt $d(a_n, a) < \varepsilon$,

in diesem Fall heißt a der Grenzwert von (a_n);

(b) eine Cauchy-Folge, falls gilt:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß $\forall n, m \geq N$ gilt

$d(a_n, a_m) < \varepsilon$.

Bem.: (1) Nur minimale Veränderungen gegenüber den Begriffen aus Analysis I: $\mathbb{K} \rightsquigarrow X$, $|a - a_n| \rightsquigarrow d(a, a_n)$

(2) Der Grenzwert a in Teil (a) der Def. ist eindeutig bestimmt. $(\rightarrow \ddot{U})$

(3) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge. $(\rightarrow \ddot{U})$

(4) Bez.: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ in (X, d), $a_n \xrightarrow[d]{} a \ (n \to \infty)$

für konvergente Folgen. Für Cauchy-Folgen:

$\lim\limits_{n, m \to \infty} d(a_n, a_m) = 0$ oder $d(a_n, a_m) \to 0$

$(n, m \to \infty)$.

<u>Def.</u>: Ein metrischer Raum (X,d) heißt <u>vollständig</u>, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert.
Ein vollständiger normierter Vektorraum (d.h. vollständig bezgl. der von der Norm induzierten Metrik) heißt <u>Banachraum</u>.

Bekannt: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sind Banachräume.
In Verallgemeinerung dieser Tatsache soll bewiesen werden, daß auch $(\mathbb{K}^n, \| \ \|)$ mit einer beliebigen Norm $\| \ \|$ ein Banachraum ist. Dazu zeigen wir:

<u>Satz 1</u>: (X,d) und (X',d') seien metrische Räume, das kartesische Produkt $X \times X'$ sei versehen mit der Produktmetrik

$$\delta((x,x'),(y,y')) := d(x,y) + d'(x',y').$$

Dann gilt: Eine Folge $((x_n, x_n'))_n$ in $(X \times X', \delta)$ ist genau dann konvergent (bzw. eine Cauchy-Folge), wenn die Komponentenfolgen $(x_n)_n$ in (X,d) und $(x_n')_n$ in (X',d') konvergent (bzw. Cauchy-Folgen) sind.

Bem. (1) δ ist eine Metrik ($\to$ PÜ)
(2) Man kann an dieser Stelle auch $\delta((x,x'),(y,y')) = \max(d(x,y), d'(x',y'))$ oder $\ldots = (d(x,y)^2 + d'(x',y')^2)^{\frac{1}{2}}$ verwenden. Letzteres ist besonders dann sinnvoll, wenn d und d' von einem Skalarprodukt abstammen.

Bew. (für konvergente Folgen):

Es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,a) = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} d'(x_n',a')$. Dann ergeben die Rechenregeln für Grenzwerte

$$0 = \lim_{n\to\infty} d(x_n,a) + \lim_{n\to\infty} d'(x_n',a') = \lim_{n\to\infty} d(x_n,a)+d'(x_n',a')$$

$$= \lim_{n\to\infty} \delta((x_n,x_n'),(a,a')).$$

Umgekehrt: Wir haben $0 \le d(x_n,a) \le \delta((x_n,x_n'),(a,a'))$, also folgt mit dem Sandwich-Thm. aus

$$\lim_{n\to\infty} \delta((x_n,x_n'),(a,a')) = 0,$$

daß auch $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,a) = 0$. Ebenso sieht man $\lim\limits_{n\to\infty} d'(x_n',a') = 0$. $\square$

Folgerungen: (1) $(X\times X',\delta)$ ist vollständig genau dann, wenn (X,d) und (X',d') vollständig sind.

(2) Eine Folge $(x_k) = (x_k^{(1)},\dots,x_k^{(n)})$ in $(\mathbb{K}^n, \| \ \|_1)$ ist genau dann konvergent (bzw. eine Cauchy-Folge), wenn jede Komponentenfolge $(x_k^{(\ell)})_k$, $1\le \ell \le n$, konvergent (bzw. Cauchy) ist. Insbesondere ist $(\mathbb{K}^n, \| \ \|_1)$ vollständig.

(3) $(\mathbb{K}^n, \| \ \|)$ mit einer beliebigen Norm ist vollständig, da auf $\mathbb{K}^n$ alle Normen äquivalent sind. Insbes. ist $(\mathbb{K}^n, |\cdot|)$ vollständig ($|\ |$ die euklidische Norm.)

Als nächstes sollen die abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raumes durch Folgen charakterisiert werden. Dazu führen wir den Begriff des Häufungspunkts ein:

Def.: Es sei (X,d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. $x \in X$ heißt Häufungspunkt von M, falls eine Folge (x_k) in $M \setminus \{x\}$ existiert mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ in (X,d). Die Menge der Häufungspunkte wird mit $\mathcal{H}(M)$ bezeichnet. Ist $y \in M \setminus \mathcal{H}(M)$, so heißt y ein isolierter Punkt von M.

Satz 2: Für jede Teilmenge M eines metrischen Raums (X,d) gilt $\overline{M} = M \cup \mathcal{H}(M)$; insbesondere ist M genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Für jede Folge (x_k) in M, die in X konvergiert, ist $\lim_{k\to\infty} x_k \in M$.

Bew.: Die Bedingung im Nachsatz bedeutet

$$M \cup \mathcal{H}(M) \subset M \text{ und damit } M \cup \mathcal{H}(M) = M.$$

Zusammen mit dem ersten Teil ($\overline{M} = M \cup \mathcal{H}(M)$, noch zu zeigen!) ist sie also gleichwertig zu $M = \overline{M}$, was die Abgeschlossenheit von M bedeutet (1.2, Satz 4).

Wir wissen: $\overline{M} = M \cup \partial M$ und zeigen also

$$M \cup \partial M \overset{!}{=} M \cup \mathcal{H}(M)$$

"$\subset$" Ist $x \in \partial M \setminus M$, so ist aufgrund der Randpunkteigenschaft $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap M \neq \emptyset$. Also existiert eine Folge (x_n) in M mit $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$ und $x_n \neq x$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Das heißt: x ist ein Häufungspunkt von M.

"$\supset$" Sei $x \in \mathcal{H}(M) \setminus M$. Dann ist $x \in M^c$, also $V \cap M^c \neq \emptyset$ für jede Umgebung V von x.

Ferner existiert eine Folge (x_n) in M mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in (X,d). Dann ist aber auch $V \cap M \neq \emptyset$ für jede Umgebung V von x. Damit ist $x \in \partial M$ gezeigt, denn x hat die Randpunkteigenschaft. $\square$

Folgerung: Ist (X,d) vollständig und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist (A,d) vollständig.

Bew.: (x_n) Cauchy in $(A,d) \Rightarrow (x_n)$ Cauchy in (X,d)
$\Rightarrow \exists x \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, denn (X,d) ist vollst.
Da A abgeschlossen ist, gilt $x \in A$, also (A,d) vollständig. $\square$

Wir können jetzt den Begriff der Konvergenz einer Funktion zwischen metrischen Räumen in einfacher Weise formulieren:

Def.: Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $M \subset X$, $x_0 \in \mathcal{H}(M)$ sowie $f: M \to Y$ eine Abbildung.

Dann bedeutet $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y$, daß für alle Folgen (x_k) in X mit $\lim\limits_{k \to \infty} d_X(x_k, x_0) = 0$ gilt, daß

auch $\lim\limits_{k \to \infty} d_Y(f(x_k), y) = 0$.

(Die Existenz einer Folge (x_k) mit $x_k \xrightarrow{d_X} x_0$ ist durch die Voraussetzung $x_0 \in \mathcal{H}(M)$ gesichert.)

19.10.12.

Wir kommen damit zum Begriff der Stetigkeit:

Def.: Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.
Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt

(a) stetig in $x_0 \in X$, falls gilt:

$\forall \varepsilon > 0$ ex. $\delta > 0$, s.d. $\forall x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$ auch

$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ ist;

(b) stetig in X, falls f in jedem $x_0 \in X$ stetig ist;

(c) gleichmäßig stetig, falls gilt

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, so daß $\forall x, x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$

auch $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Bem.: Im Vergleich zu Analysis I wurde lediglich $|x - x_0|$ durch $d_X(x, x_0)$ und $|f(x) - f(x_0)|$ durch $d_Y(f(x), f(x_0))$ ersetzt.

Bsp.: Hölderstetige Funktionen sind glm. stetig. Dabei heißt $f: X \to Y$ hölderstetig zum Exponenten $\alpha \in (0,1]$, falls für alle $x, x' \in X$ die Ungleichung

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq L\, d_X(x,x')^\alpha$$

besteht. Zum Beweis sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen $\delta = (\frac{\varepsilon}{L})^{\frac{1}{\alpha}}$. Sind dann $x, x' \in X$ mit $d_X(x,x') < \delta$, so haben wir

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq L \cdot d_X(x,x')^\alpha < L\delta^\alpha = \varepsilon.$$

Spezialfall $\alpha = 1$: Lipschitzstetige Funktionen

Bsp. hierfür: $(X, \| \ \|_X)$ sei ein normierter $\mathbb{K}$-VR.

(1) $\| \ \|_X : X \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \|x\|_X$

ist Lipschitz-stetig mit $L=1$, denn aufgrund der Dreiecksungleichung ist $|\|x\|_X - \|x'\|_X| \leq \|x-x'\|_X$.

(2) $(Y, \| \ \|_Y)$ sei ein weiterer normierter Vektorraum und $A \in L(X,Y)$. Dann ist A Lipschitz-stetig mit $\|A\| = L$ (= Lipschitzkonstante in der Def. oben).

Denn: $\|Ax - Ax'\|_Y = \|A(x-x')\|_Y \leq \|A\| \, \|x-x'\|_Y$.

Insbesondere ist also jede beschränkte lineare Abbildung gleichmäßig stetig.

(3) Wählen wir im vorigen Bsp. (2) $(X, \| \ \|_X) = (\mathbb{K}^n, | \ |)$, so ist jede lineare Abbildung

$A: X \to Y$ beschränkt (und damit nach

(2) auch Lipschitz- und glm. stetig). Zum Bew.

Seien $e_1, \dots, e_n$ die kanonischen Einheitsvektoren im $\mathbb{K}^n$. (H27)

Für $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ und eine lineare Abbildung

$$A : (\mathbb{K}^n; |\ |) \longrightarrow (Y; \|\ \|_Y)$$

haben wir dann

$$\|Ax\|_Y = \|A \sum_{i=1}^n x_i e_i\|_Y = \|\sum_{i=1}^n x_i Ae_i\|_Y$$

$$\underset{(N2),(N3)}{\leq} \sum_{i=1}^n |x_i|\, \|Ae_i\|_Y \leq \Big(\sum_{i=1}^n \|Ae_i\|_Y^2\Big)^{\frac{1}{2}} |x|,$$

letzteres aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Also ist $A \in L((\mathbb{K}^n; |\ |), (Y, \|\ \|_Y))$ mit

$$\|A\| \leq C_A := \Big(\sum_{i=1}^n \|Ae_i\|_Y^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Mit der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{K}^n$ ergibt sich hieraus sogar: Ist $\|\ \|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{K}^n$, $(Y, \|\ \|_Y)$ ein normierter $\mathbb{K}$-VR und

$$A : (\mathbb{K}^n; \|\ \|) \longrightarrow (Y; \|\ \|_Y)$$

linear, so ist A beschränkt (und damit glm. stetig). Um dies einzusehen müssen wir nur beachten, dass $\|Ax\|_Y \leq C_A |x| \leq C_A \cdot C \cdot \|x\|$.

Stetigkeit und gleichmässige Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen lassen sich durch Folgen charakterisieren – ganz genau so, wie wir das in Analysis I im Spezialfall $(\mathbb{C}, |\ |)$ bereits kennengelernt haben:

Satz 3 (Folgenkriterium): Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f: X \to Y$ ist

(1) stetig in $x_0 \in X$ genau dann, wenn für alle Folgen (x_n) in X mit $\lim\limits_{n\to\infty} d_X(x_n, x_0) = 0$ gilt, daß auch $\lim\limits_{n\to\infty} d_Y(f(x_n), f(x_0)) = 0$ ist;

(2) gleichmäßig stetig, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} d_Y(f(x_n), f(y_n)) = 0$ für alle Folgenpaare $(x_n), (y_n)$ in X, für die $\lim\limits_{n\to\infty} d_X(x_n, y_n) = 0$ gilt.

Bew.: Wie in Analysis I.

Bem.: Die Definition der Stetigkeit impliziert, dass in einem isolierten Punkt $x_0 \in X$ jede Abbildung f stetig ist. In einem Häufungspunkt $x_0 \in X$ ist die in (1) angegebene Bedingung gleichbedeutend mit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \ (\text{in } (Y, d_Y)).$$

Folgerungen aus Satz 3:

(1) (X,d_X), (Y,d_Y) und (Z,d_Z) seien metrische Räume und $f: Y \to Z$ sowie $g: X \to Y$ gleichstetig (bzw. gleichmässig stetig). Dann ist auch $f \circ g : X \to Z$ stetig (bzw. glm. stetig).

Bew. für glm. stetig: $d_X(x_n, y_n) \to 0 \Rightarrow d_Y(g(x_n), g(y_n)) \to 0$
$\Rightarrow d_Z(f\circ g(x_n), f\circ g(y_n)) \to 0 \quad (n \to \infty)$. $\square$

(2) Es seien $f, g : (X,d) \to \mathbb{K}$ stetig. Dann gelten:

(i) $f+g$ und $f\cdot g$ sind stetig,

(ii) ist zusätzlich $g(x) \neq 0 \ \forall x \in X$, so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig.

(Bew.: Satz 3 und Rechenregeln für Grenzwerte)

Bem.: Sind f und g gleichmäßig stetig, so sind $f\cdot g$ und $\frac{f}{g}$ i.allg. nicht gleichmäßig stetig!

(3) (i) Monome in mehreren Variablen, also Abbildungen

$$M : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto M(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} =: x^\alpha$$

mit einem Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ sind stetig.

(ii) Polynome in mehreren Veränderlichen sind Abbildungen

$$P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto P(x) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j M_j(x)$$

mit Monomen M_j wie vorher definiert. Sie sind ebenfalls stetig.

(iii) Rationale Funktionen

$$R : \mathbb{K}^n \setminus \{x \in \mathbb{K}^n : Q(x) = 0\} \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$$

mit Polynomen P und Q sind ebenfalls stetig.

Bew. von (3): Die Komponentenabbildungen

$x \mapsto x_j$ (Projektionen auf die j-te Komponente)

sind linear und also stetig. Wiederholte Anwendung von (2) ergibt die Beh. $\square$

(4) (X, d) und (Y_1, d_1) sowie (Y_2, d_2) seien metrische Räume und

$$f : X \to Y_1 \times Y_2, \quad x \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

eine Abbildung. Dann gilt: f ist (glm.) stetig genau dann, wenn dies für beide Komponentenfunktionen $f_1 : X \to Y_1$ und $f_2 : X \to Y_2$ zutrifft. Insbes. ist eine Abb.

$$f : X \to \mathbb{K}^n, \quad x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

(glm.) stetig, wenn alle f_i $(1 \le i \le n)$ dies sind.

Bew.: Satz 1 und Satz 3.

Bei der Untersuchung der Stetigkeit von Funktionen

$$f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^m \supset U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

kann man sich also auf die Untersuchung der Komponentenfunktionen f_i beschränken. Eine entsprechende Reduktion für den Definitionsbereich ist nicht möglich, wie das folgende Beispiel zeigt:

Bsp.: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Dann sind beide sog. "Schnittfunktionen"

$$f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \longmapsto f_x(y) := f(x,y) \quad \text{und}$$

$$f_y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_y(x) := f(x,y)$$

für jedes feste x bzw. für jedes feste y stetig als rationale Funktion.

Die Funktion f selbst ist hingegen unstetig im Nullpunkt, denn wenn wir $x=y$ wählen haben wir

$$\lim_{\substack{x=y\to 0\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{2x^2}{2x^2} = 1 \neq 0 = f(0,0) .$$

Zum Abschluß dieses Abschnitts über Grenzwerte und Stetigkeit sollen zwei weitere Stetigkeitskriterien bewiesen werden:

<u>Satz</u> 4: Es seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $f: X \to Y$ eine Abbildung. Dann gelten:

(1) f ist stetig in $x_0 \in X$ genau dann, wenn zu jeder Umgebung $V_{f(x_0)} \subset Y$ von $f(x_0)$ eine Umgebung $U_{x_0} \subset X$ von x_0 existiert mit $f(U_{x_0}) \subset V_{f(x_0)}$;

(2) f ist stetig in X genau dann, wenn $f^{-1}(V)$ offen ist in (X, d_X) für jede offene Teilmenge V von (Y, d_Y).

<u>Bew.</u>: (1) Wir formulieren zunächst die definierende Eigenschaft der Stetigkeit* etwas um. Diese lautet:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \text{ sodaß } d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \ \forall x \text{ mit } d_X(x, x_0) < \delta$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{—"—}, \text{ " " } f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$$

Ist jetzt $V_{f(x_0)}$ eine Umgebung von $f(x_0)$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodaß $B_\varepsilon(f(x_0)) \subset V_{f(x_0)}$. Ist f stetig in x_0, finden wir also noch ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)) \subset V_{f(x_0)}$. Das zeigt: Stetigkeit in x_0 impliziert die in (1) genannte Eigenschaft.

Sei umgekehrt $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dann gibt es zu $V_{f(x_0)} := B_\varepsilon(f(x_0))$ ein $U_{x_0} \ni x_0$ mit $f(U_{x_0}) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$. Da U_{x_0} eine Umgebung von x_0 ist, ex. $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \subset U_{x_0}$ und damit $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$, und das bedeutet die Stetigkeit von f in x_0.

---

* in einem Punkt x_0

(2) Zunächst sei $f: X \to Y$ stetig und $V \subset Y$ offen.

Ist $f^{-1}(V) = \emptyset$, so sind wir fertig, denn $\emptyset$ ist offen.

Andernfalls sei $x_0 \in f^{-1}(V)$. Da f stetig und V offen ist, existiert $\delta > 0$, so daß $f(B_\delta(x_0)) \subset V$ und damit auch $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(V)$. D.h. $f^{-1}(V)$ ist offen.

Umgekehrt gelte $f^{-1}(V)$ offen für jede offene Menge $V \subset Y$. Dann ist $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))) \subset X$ offen ($\varepsilon > 0$, $x_0 \in X$ beliebig!) Dann ex. also ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ und damit $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$. Also ist f stetig in jedem $x_0 \in X$. $\square$

Die in Satz 4 genannten Eigenschaften erlauben eine "reine topologische" Definition der Stetigkeit:

<u>Def.</u>: Seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Räume und $f: X \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt f

(i) stetig in $x_0 \in X$:$\Leftrightarrow$ $\forall$ Umgebungen $V_{f(x_0)}$ von $f(x_0)$ existiert eine Umgebung U_{x_0} von x_0, so daß

$$f(U_{x_0}) \subset V_{f(x_0)};$$

(ii) stetig in X :$\Leftrightarrow$ $f^{-1}(V) \in \tau \ \forall V \in \sigma$.

<u>Bem.</u>: Der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit läßt sich nicht für lediglich topologische Räume fassen. Man benötigt zusätzliche Strukturelemente.

Satz 4 hat aber auch einen praktischen Nutzen. Mit seiner Hilfe können wir oft wesentlich leichter entscheiden, ob eine Menge offen bzw. abgeschlossen ist.

Bsp. (1) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2}$, $a_i > 0$

Dann ist f als ein Polynom stetig. Das Ellipsoid

$$E := \{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1 \}$$

ist dann abgeschlossen, weil $E = f^{-1}(-\infty, 1]$.

(2) Das "Achsenkreuz" $\{x \in \mathbb{R}^n : \prod_{i=1}^{n} x_i = 0\}$ ist ebenfalls abgeschlossen, denn

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \prod_{i=1}^{n} x_i = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\} = g^{-1}\{0\}$$

für die stetige Abb. $g(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i$ (Monom).

(3) Der Halbraum $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ ist offen, denn mit $P_n(x) = x_n$ gilt $\mathbb{R}^n_+ = P_n^{-1}((0,\infty))$, und P_n ist eine stetige Projektion.