1.5 Kompaktheit

In Analysis I haben wir den Begriff der Kompaktheit bereits kennengelernt und aufgefaßt als

$K \subset \mathbb{R}$ kompakt $:\Leftrightarrow$ K ist abgeschlossen und beschränkt.

Diese Definition erweist sich in allgemeinen metrischen Räumen als unzureichend. Wir werden hier die "Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft" (Konvergenz einer Teilfolge) zur Charakterisierung der Kompaktheit verwenden. (Im folgenden: (X,d) metrisch mit $X \neq \emptyset$)

Def.: Ein metrischer Raum (X,d) heißt kompakt, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt. Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes (X,d) heißt kompakt, wenn (K,d) kompakt ist.

Um den Zusammenhang zwischen Kompaktheit (i.S. der neuen Def.) einerseits und Beschränktheit u. Abgeschlossenheit andererseits zu klären, müssen wir zunächst festlegen, was unter Beschränktheit in metrischen Räumen zu verstehen ist.

Def. Ein metrischer Raum (X,d) heißt beschränkt, wenn $\operatorname{diam}(X) := \sup\{d(x,y) : x,y \in X\} < \infty$ ist. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt beschränkt, wenn (M,d) beschränkt ist.

Bem.: (i) diam steht für Diameter = Durchmesser.

(ii) (X,d) ist beschränkt $\Leftrightarrow \exists\, x_0 \in X,\ R \in \mathbb{R}$ so daß

$$d(x,x_0) \le R \quad \forall x \in X.$$

(iii) Insbes. ist eine Teilmenge M eines normierten $\mathbb{K}$-VR $(X, \| \ \|)$ beschränkt genau dann, wenn ein $R > 0$ ex. mit $\|x\| \le R \quad \forall x \in M$.

(iv) Eine Folge (x_n) in (X,d) heißt beschränkt, wenn $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

(v) Jede Cauchy-Folge (und damit auch jede konvergente Folge) in einem metrischen Raum (X,d) ist beschränkt.

Begründungen:

(ii) "$\Leftarrow$" aus $d(x,x_0) \le R \ \forall x \in X$ folgt wegen $d(x,y) \le d(x,x_0) + d(x_0,y)$, dass

$$\sup\{d(x,y) : x,y \in X\} \le 2R.$$

(iii) $x_0 = 0$ in (ii)

(v) Sei $d(x_n,x_m) \le 1 \quad \forall n,m \ge N$ und

$$R = \max\left(d(x_1,x_N),\dots, d(x_N,x_{N-1})\right) + 1$$

Dann ist $d(x_n,x_N) \le R \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Satz 1: (a) Jeder kompakte metrische Raum ist beschränkt und vollständig.

(b) Jede kompakte Teilmenge K eines metrischen Raumes (X,d) ist beschränkt und abgeschlossen.

Bew.: (a) Ist (x_n) eine Cauchy-Folge in (X,d) und $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$, so folgt

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) \xrightarrow[(n,k\to\infty)]{} 0$$

Also ist (x_n) konvergent und damit (X,d) vollständig.

Beschränktheit: Ist $\sup\{d(x,x_0) : x \in X\} = \infty$, so existiert (x_n) mit $d(x_0,x_n) \geq n$. Diese besitzt keine beschränkte, also auch keine konvergente Teilfolge.

(b) Beschränktheit klar nach (a). Abgeschlossenheit: Ist (x_n) eine Folge in K mit $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_0)=0$ für ein $x_0 \in X$. Dann ist (x_n) Cauchy in (K,d) und nach Teil (a) konvergent gegen ein $y \in K$. Die Eindeutigkeit des Grenzwerts ergibt $x=y\in K$. Das zeigt die Abgeschlossenheit von K.

Kompaktheit impliziert also Abgeschlossenheit und Beschränktheit. Im allgemeinen ist es eine echt stärkere Eigenschaft, wie das folgende Bsp. zeigt:

Bsp. $X = \mathbb{N}$, $d(m,n) := \begin{cases} 1 & n \neq m \\ 0 & n = m \end{cases}$

Dann ist X als Teilmenge von (X,d) beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt, denn für $n \neq m$ ist $d(n,m) = 1$, es kann also keine konvergente Teilfolge von $(n)_n$ geben.

Im $\mathbb{K}^n$ fallen jedoch, ebenso wie im $\mathbb{K}$, beide Begriffe zusammen. Um dies einzusehen, zeigen wir:

Satz 2 (Bolzano-Weierstraß im $\mathbb{K}^n$) Jede beschränkte Folge $(x_k)_k$ im $\mathbb{K}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Bew. Ind. über n, der Fall $n=1$ ist bekannt (Ana I).

Sei nun $(x_k) = (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n)})$ eine beschränkte Folge im $\mathbb{K}^n$, wobei $n \geq 2$. Dann ist

$$(x_k') = (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n-1)})$$

eine beschränkte Folge im $\mathbb{K}^{n-1}$, besitzt also eine Teilfolge $(x_{k_j}')_j$ mit

$$\lim_{j \to \infty} x_{k_j}' = x' \quad (\text{im } \mathbb{K}^{n-1})$$

Die Folge $(x_{k_j}^{(n)})_j$ ist eine beschränkte Folge in $\mathbb{K}$, (H 69)

besitzt also nach BW ebenfalls eine konvergente

Teilfolge $x_{k_{j_\ell}}^{(n)} \longrightarrow x^{(n)} \quad (\ell \to \infty)$ in $\mathbb{K}$.

Insges. $\lim_{\ell\to\infty} x_{k_{j_\ell}} = (x', x^{(n)})$ in $\mathbb{K}^n$. $\square$

Folgerung: Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{K}^n$ ist kompakt.

Bew.: Ist (x_n) eine Folge in A, so ist diese beschränkt, besitzt also nach Satz 2 eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ mit

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \quad \text{in } \mathbb{K}^n.$$

Da $A = \overline{A}$, gilt $x \in A$. Also ist K kompakt. $\square$

Wir kommen nun zu einigen Sätzen über stetige Funktionen, deren Definitionsbereich kompakt ist.

Satz 3: Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $K \subset X$ kompakt und $f: K \to Y$ stetig. Dann gelten:

(1) f ist gleichmäßig stetig,

(2) $f(K)$ ist kompakt.

Folgerung aus (2) – Satz vom Maximum: Ist $\emptyset \neq K$ kompakt und $f: K \to \mathbb{R}$ stetig, so nimmt f auf K ihr Maximum und ihr Minimum an.
(Denn: Die kompakte Menge $f(K) \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und ein Minimum, wie in Analysis I gezeigt.)

Bew. des Satzes: Zu (1) Nehmen wir an, f sei stetig aber nicht gleichmäßig stetig, so gibt es ein Folgenpaar (x_n), (y_n) in K und ein $\varepsilon_0 > 0$, sodaß

(i) $\lim\limits_{n \to \infty} d_X(x_n, y_n) = 0$

(ii) $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$

(Verneinung des Folgenkriteriums für glm. stetigkeit und Auswahl einer Teilfolge.)

Nun ist K kompakt, also ex. eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) und ein $x_0 \in K$ mit

$$\lim_{k \to \infty} d_X(x_{n_k}, x_0) = 0 .$$

Dann ist nach (i) aber auch

$$\lim_{k\to\infty} d_Y(y_{n_k}, x_0) \le \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, y_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) = 0.$$

Aufgrund der Stetigkeit von f in x_0 folgt daraus

$$\lim_{k\to\infty} d_Y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \le \lim_{k\to\infty} d_Y(f(x_{n_k}), f(x_0))$$

$$+ \lim_{k\to\infty} d_Y(f(x_0), f(y_{n_k})) = 0,$$

ein Widerspruch zu (ii).

(2) Sei (y_n) eine Folge in $f(K)$. Dann gibt es eine Folge (x_n) in K mit $f(x_n) = y_n$. Da K kompakt ist, ex. eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) und ein $x_0 \in K$ mit $\lim_{k\to\infty} d_X(x_{n_k}, x_0) = 0$. Die Stetigkeit von f impliziert nun $\lim_{k\to\infty} d_Y(y_{n_k}, f(x_0)) = 0$. Das heißt (y_n) besitzt mit $(y_{n_k})_k$ ebenfalls eine konvergente Teilfolge. $\square$

Als Anwendung des Satzes vom Maximum zeigen wir:

Satz 4: Ist $A \subset \mathbb{K}^n$ sowohl offen als auch abgeschlossen, so gilt $A = \emptyset$ oder $A = \mathbb{K}^n$.

Bew.: Wir zeigen: Ist $\emptyset \subsetneq A \subsetneq \mathbb{K}^n$ abgeschlossen, so besitzt A mindestens einen Randpunkt (ist also nicht offen).

Dazu wählen wir $x \in A$ und $y \in A^c$ und betrachten die Verbindungsstrecke

$$[x,y] = \{\lambda x + (1-\lambda) y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

zwischen beiden. Diese ist abgeschlossen und beschränkt und daher kompakt. Ebenso ist

$$K = A \cap [x,y] \quad \text{kompakt. Die Funktion}$$

$$f : K \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto |z-x| \quad \text{ist stetig, nimmt also}$$

in einem $z_0 \in K$ ihr Maximum an.

Ist jetzt $\varepsilon > 0$ vorgelegt, wählen wir $z_\varepsilon := z_0 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{(y-x)}{|y-x|}$.

Dann ist $z_\varepsilon \in [x,y]$ (sofern ε klein genug ist), aber $z_\varepsilon \notin K$, denn $f(z_\varepsilon) > f(z_0)$. Also $z_\varepsilon \notin A$ und damit $z_\varepsilon \in B_\varepsilon(z_0) \cap A^c$. Damit ist die Randpunkteigenschaft von z_0 nachgewiesen. □

Bem.: Besteht ein metrischer Raum (X,d) aus zwei Teilräumen (X_1,d) und (X_2,d), so dass

$$X_1 \neq \emptyset, \quad X_2 \neq \emptyset \quad \text{und} \quad X_1 \cup X_2 = X$$

sowie $\inf \{d(x_1,x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\} > 0$,

so haben nicht nur $\emptyset$ und X, sondern auch X_1 und X_2 die Eigenschaft, sowohl offen, als auch abgeschlossen zu sein. – Ist X eine Menge und d die Trivialmetrik auf X, so ist sogar jede Teilmenge von X sowohl offen als auch abgeschlossen.

Abschließende Bem. zur Kompaktheit:

In verschiedenen Lehrbüchern (z.B. Forster, Königsberger) finden Sie die folgende Definition der Kompaktheit:

Ein metrischer Raum (X,d) heißt kompakt, wenn aus jeder offenen Überdeckung

$$X \subset \bigcup_{i\in I} U_i$$

von X mit offenen Mengen U_i eine endliche Teilüberdeckung

$$X \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_{i_j}$$

ausgewählt werden kann. (Sogenannte Heine-Borel'sche Überdeckungseigenschaft.) Man spricht auch von "Überdeckungskompaktheit" im Gegensatz zu "Folgenkompaktheit", was "unserer" Definition (Existenz einer konvergenten Teilfolge) entspricht.

In metrischen Räumen sind beide Begriffe äquivalent, Bew. siehe Kaballo II, Abschnitt 10.

Vorteil des Begriffs der Überdeckungskompaktheit: Unmittelbar verallgemeinerbar auf topologische Räume – man ersetze (X,d) durch (X,τ) und metrisch durch topologisch.