Kapitel I: Maß- und Integrationstheorie

1. Quader und Figuren

Bez. Sei X eine Menge. Mit $\mathcal{P}(X)$ bezeichnen wir die Potenzmenge von X, also die Menge aller Teilmengen von X.
Seien $a = (a_1, \dots, a_n),\ b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} a \le b :&\ \Leftrightarrow\ a_i \le b_i \text{ für } i = 1, \dots, n \\ a < b :&\ \Leftrightarrow\ a_i < b_i \text{ für } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Ist $a \le b$, so sei $[\,a, b\,[:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \le x < b\}$. Eine solche Menge heißt ein (achsenparalleler, halboffener) *Quader* in $\mathbb{R}^n$.
Ist $a \le b$, aber nicht $a < b$, so ist $[\,a, b\,[= \emptyset$.
Die Menge aller Quader im $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{Q}^n$ bezeichnet.
Für $[\,a, b\,[\in \mathcal{Q}^n$ sei

$$\lambda^n\left([\,a, b\,[\right) := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

Eine Vereinigung von endlich vielen Quadern in $\mathbb{R}^n$ heiße *Figur* in $\mathbb{R}^n$. Es sei $\mathcal{F}^n$ die Menge aller Figuren in $\mathbb{R}^n$.

Def. Sei X eine Menge und $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$.
$\mathcal{R}$ heißt ein *Ring von Teilmengen* von X, falls gilt:

(1) $\emptyset \in \mathcal{R}$.

(2) Sind $A, B \in \mathcal{R}$, so ist $A \cup B \in \mathcal{R}$.

(3) Sind $A, B \in \mathcal{R}$, so ist $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Satz 1. $\mathcal{F}^n$ ist ein Ring von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Def. Sei X eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen von X. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt ein *Prämaß* auf $\mathcal{R}$, falls gilt:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) $\mu(A) \ge 0\ \ \forall\, A \in \mathcal{R}$.

(3) Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkt und ist $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{R}$, so ist $\mu(\bigcup\limits_m A_m) = \sum\limits_m \mu(A_m)$.

Satz 2. Es gibt genau ein Prämaß λ^n auf $\mathcal{F}^n$ mit

$$\lambda^n([a, b\,[) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)\ \ \forall\, [a, b\,[\in \mathcal{Q}^n.$$

2. σ-Algebren und Maße

Def. Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann heißt $\mathcal{A}$ eine *σ-Algebra* in X, wenn gilt:

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(2) Ist $A \in \mathcal{A}$, so ist $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

(3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{A}$.

Bem. Eine σ-Algebra ist ein Ring.

Lemma 1. a) Der Durchschnitt von beliebig vielen σ-Algebren in X ist eine σ-Algebra in X.
b) Zu jeder Teilmenge $\mathcal{B}$ von $\mathcal{P}(X)$ gibt es eine kleinste σ-Algebra in X, die $\mathcal{B}$ enthält.

Bezeichnung: Die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{B}$ enthält, wird mit $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ bezeichnet.

Beispiel: Sei X ein metrischer Raum, $\mathcal{T}$ die Menge aller offenen Teilmengen von X. Die Elemente der σ-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ heißen die *Borel-Mengen* von X.
$\mathcal{A}(\mathcal{T})$ enthält alle offenen, alle abgeschlossenen und sehr viele weitere Mengen.

Def. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in X. Ein *Maß* auf $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) $\mu(A) \geq 0 \;\; \forall\, A \in \mathcal{A}$

(3) Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, so $\mu\big(\bigcup\limits_m A_m\big) = \sum\limits_m \mu(A_m)$.

Bem. Ein Prämaß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist ein Maß auf $\mathcal{A}$.

Def. a) Ein Paar $(X, \mathcal{A})$, bestehend aus einer Menge X und einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ in X, heißt ein *Messraum*.
b) Ein Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt ein *Maßraum*, wenn $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ ist.

Satz 1. (Maßfortsetzungssatz von Carathéodory)
Sei X eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen von X, μ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$. Dann kann μ zu einem Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ fortgesetzt werden.

Diese Fortsetzung ist folgendermaßen definiert: Ist $A \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$, so sei $\mathcal{U}(A)$ die Menge aller Folgen (B_m) in $\mathcal{R}$ mit $A \subseteq B_1 \cup B_2 \cup \ldots$. Ist $\mathcal{U}(A) = \emptyset$, so sei $\mu(A) := \infty$, andernfalls

$$\mu(A) := \inf \Big\{ \sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_m) \mid (B_m) \in \mathcal{U}(A) \Big\} .$$

Def. Ein Prämaß μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ von Teilmengen von X heißt *σ-endlich*, wenn es eine Folge $A_1, A_2, \ldots$ in $\mathcal{R}$ gibt, so dass gilt:

(1) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$

(2) $X = \bigcup\limits_m A_m$

(3) $\mu(A_m) < \infty \;\; \forall\, m \in \mathbb{N}$.

Satz 2. Ist $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen einer Menge X und μ ein σ-endliches Prämaß auf $\mathcal{R}$, so kann μ auf genau eine Weise zu einem Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ fortgesetzt werden.

3. Das Lebesgue-Maß

Mit $\mathcal{T}^n$ bezeichnen wir die Menge der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die sogenannte *Topologie* von $\mathbb{R}^n$. Sei $\mathcal{B}^n = \mathcal{A}(\mathcal{T}^n)$. Die Elemente von $\mathcal{B}^n$ heißen die *Borel-Mengen* in $\mathbb{R}^n$.

Satz 1. $\mathcal{A}(\mathcal{F}^n) = \mathcal{B}^n$.

Auf dem Ring $\mathcal{F}^n$ haben wir das Prämaß λ^n. Dieses ist σ-endlich und durch seine Werte auf Quadern eindeutig festgelegt. Nach 2 lässt es sich zu einem eindeutig bestimmten Maß λ^n auf $\mathcal{A}(\mathcal{F}^n) = \mathcal{B}^n$ fortsetzen. Also:

Satz 2. Es gibt genau ein Maß λ^n auf der Menge $\mathcal{B}^n$ der Borel-Mengen in $\mathbb{R}^n$, so dass für jeden Quader $[\,a,b\,[\in \mathcal{Q}^n$ gilt:

$$\lambda^n([\,a,b\,[) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

λ^n heißt das *Lebesgue-Maß* auf $\mathbb{R}^n$.

Def. Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *Bewegung* oder *Kongruenz*, wenn bzgl. der Euklidischen Norm gilt:

$$\| \, T(x) - T(y) \, \| = \| \, x - y \, \| \quad \forall \, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Satz 3. Das Lebesgue-Maß λ^n ist bewegungsinvariant, d.h.: Ist $B \in \mathcal{B}^n$ und ist T eine Bewegung, so ist $T(B) \in \mathcal{B}^n$ und $\lambda^n(T(B)) = \lambda^n(B)$.

Def. Sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt H eine *affine Hyperebene* in $\mathbb{R}^n$, wenn es einen $(n-1)$-dimensionalen linearen Teilraum V von $\mathbb{R}^n$ und ein $a \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $H = a + V := \{a + v \mid v \in V\}$.

Satz 4. Ist H eine affine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$, so ist $\lambda^n(H) = 0$.

Folgerung 1. Alle Borel-Mengen, die in einer offenen Hyperebene liegen, haben das Lebesgue-Maß 0. Insbesondere haben die einelementigen Mengen das Maß 0 (falls $n > 0$), und daher haben alle abzählbaren Mengen das Maß 0.

Folgerung 2. Das Lebesgue-Maß eines offenen oder abgeschlossenen, nicht notwendig achsenparallelen Quaders ist das Produkt der Kantenlängen.

Satz 5. Ist $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $B \in \mathcal{B}^n$, so ist $A(B) \in \mathcal{B}^n$ und

$$\lambda^n(A(B)) = |\det A| \cdot \lambda^n(B).$$

Exkurs über abzählbare Mengen

Def. Eine Menge M heißt *endlich*, wenn es ein $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und eine Bijektion von $\{1, \ldots, m\}$ auf M gibt. Andernfalls heißt M *unendlich*.

Def. Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn es eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf M gibt.

Satz 1. Eine Teilmenge M einer abzählbaren Menge A ist abzählbar oder endlich.

Satz 2. Für eine Menge M sind äquivalent:

a) M ist abzählbar oder endlich.

b) Es gibt eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf M.

Satz 3. Sind $X_1, X_2, X_3, \ldots$ abzählbare oder endliche Teilmengen einer Menge Z, so ist $\bigcup_k X_k$ abzählbar oder endlich.

Beispiel 1: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Beispiel 2: Sind X, Y abzählbar, so ist $X \times Y$ abzählbar.

Beispiel 3: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{Q}^n$ abzählbar.

Satz 4. $\mathbb{R}$ ist überabzählbar (d.h. weder endlich noch abzählbar).

Def. Wir sagen, dass zwei Mengen X und Y die *gleiche Kardinalzahl* haben, wenn es eine Bijektion von X auf Y gibt. Wir sagen, dass X eine *kleinere Kardinalzahl* als Y hat, wenn es eine Bijektion von X auf eine Teilmenge von Y, aber keine Bijektion von X auf Y gibt.

Beispiel: $\mathbb{R}^n$ hat die gleiche Kardinalzahl wie $\mathbb{R}$.

Satz 5. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ hat die gleiche Kardinalzahl wie $\mathbb{R}$.

Bem. Aus Satz 4 und Satz 5 folgt, dass $\mathbb{N}$ kleinere Kardinalzahl als $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ hat. Allgemeiner kann man zeigen: Jede Menge M hat kleinere Kardinalzahl als $\mathcal{P}(M)$. Insbesondere gibt es unendlich viele verschiedene unendliche Kardinalzahlen.

Kontinuumshypothese: Jede überabzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt die gleiche Kardinalzahl wie $\mathbb{R}$.

4. Messbare Abbildungen

Def. Seien $(X, \mathcal{A}_X)$ und $(Y, \mathcal{A}_Y)$ Messräume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *messbar* (bzgl.$\mathcal{A}_X$ und $\mathcal{A}_Y$), wenn gilt:
Ist $B \in \mathcal{A}_Y$, so ist $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_X$.
Wir schreiben dann auch $f : (X, \mathcal{A}_X) \to (Y, \mathcal{A}_Y)$.

Satz 1. Seien X, Y metrische Räume, $\mathcal{B}_X$ und $\mathcal{B}_Y$ seien die Mengen der jeweiligen Borel-Mengen. Ist $f : X \to Y$ stetig, so ist $f : (X, \mathcal{B}_X) \to (Y, \mathcal{B}_Y)$ messbar.

Bem. Sind $f : (X, \mathcal{A}_X) \to (Y, \mathcal{A}_Y)$ und $g : (Y, \mathcal{A}_Y) \to (Z, \mathcal{A}_Z)$ messbar, so ist $g \circ f : (X, \mathcal{A}_X) \to (Z, \mathcal{A}_Z)$ messbar.

Bezeichnungen: a) $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

b) Ist X eine Menge, so nennen wir eine Abbildung $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine *numerische Funktion* auf X.

c) Sei $\overline{\mathcal{B}^1} := \{A \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}) \mid A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}^1\}$. Dann ist $\overline{\mathcal{B}^1}$ eine σ-Algebra in $\overline{\mathbb{R}}$. Ihre Elemente heißen die Borel-Mengen in $\overline{\mathbb{R}}$. Die Elemente von $\overline{\mathcal{B}^1}$ sind von der Form B oder $B \cup \{\infty\}$ oder $B \cup \{-\infty\}$ oder $B \cup \{\infty, -\infty\}$ mit $B \in \mathcal{B}^1$.

d) Ist $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum, so heißt eine numerische Funktion f auf X messbar, wenn $f : (X, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}^1})$ messbar ist.

Im Folgenden sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum.

Beispiel: Sei $A \in \mathcal{P}(X)$. Die *charakteristische Funktion* χ_A von A ist definiert durch

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x \in A \\ 0 & , \text{ falls } x \notin A. \end{cases}$$

Es gilt: χ_A ist messbar $\iff A \in \mathcal{A}$.

Satz 2. Sei f eine numerische Funktion auf X. Dann sind äquivalent:

a) f ist messbar.

b) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$.

c) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X \mid f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$.

d) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$.

e) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X \mid f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$.

Satz 3. Seien f, g messbare numerische Funktionen auf X. Dann gilt:

a) $\{x \in X \mid f(x) < g(x)\} \in \mathcal{A}$.

b) $\{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{A}$.

c) $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{A}$.

d) $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{A}$.

Satz 4. Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ messbar. Dann sind $f + g$ und fg messbar.

Def. Sei (a_n) eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (\sup\{a_k \mid k \geq n\}) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (\inf\{a_k \mid k \geq n\}) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

(Beachte: Die Folge $(\sup\{a_k \mid k \geq n\})_n$ ist monoton fallend, daher existiert ihr Limes in $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.)

Bem. Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = a = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Satz 5. Seien f_n $(n \in \mathbb{N})$ messbare numerische Funktionen.

a) Die Funktionen $\sup\limits_n f_n$ und $\inf\limits_n f_n$ sind messbar.

b) Die Funktionen $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ sind messbar.

c) Die Folge (f_n) konvergiere punktweise in $\overline{\mathbb{R}}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ messbar.

5. Integrationstheorie

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Def. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *nicht-negative Treppenfunktion* auf X, wenn gilt:

$f(x) \geq 0 \ \ \forall\, x \in X$,
f ist messbar,
f nimmt nur endlich viele Werte an.

Sei $\mathcal{T}^+ = \mathcal{T}^+(X)$ die Menge der nicht-negativen Treppenfunktionen auf X.

Bez. Sei $f \in \mathcal{T}^+$. Ist X die disjunkte Vereinigung von $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$ und sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in [0, \infty[$ mit $f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, \chi_{A_i}$ (wobei die α_i nicht notwendig verschieden sind), so nennen wir dir Zerlegung $f = \sum \alpha_i \, \chi_{A_i}$ eine *Normaldarstellung* von f.

Def. Sei $f \in \mathcal{T}^+$ und sei $f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, \chi_{A_i}$ eine Normaldarstellung von f. Dann heißt $\int f \, d\mu := \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \, \mu(A_i)$ das *Integral* von f.

Satz 1. Sei $\mathcal{M}^+$ die Menge aller messbaren, nicht-negativen numerischen Funktionen auf X. Für jedes $f \in \mathcal{M}^+$ gibt es eine wachsende Folge (g_n) in $\mathcal{T}^+$ mit $f = \sup_n g_n$.

Def. Sei $f \in \mathcal{M}^+$. Man wählt eine wachsende Folge (g_n) in $\mathcal{T}^+$ mit $f = \sup_n g_n$ und setzt

$$\int f \, d\mu := \sup_n \int g_n \, d\mu.$$

Satz 2. (Satz von der monotonen Konvergenz)
Ist (f_n) eine wachsende Folge in $\mathcal{M}^+$, so ist $\sup_n f_n \in \mathcal{M}^+$ und

$$\int \sup_n f_n \, d\mu = \sup_n \int f_n \, d\mu.$$

Folgerung: Ist (f_n) eine Folge in $\mathcal{M}^+$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{M}^+$ und

$$\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big) \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Bez. Für $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sei $f^+ := \sup(f, 0)$, $f^- := (-f)^+ = -\inf(f, 0)$. Dann ist $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$.
f ist genau dann messbar, wenn f^+ und f^- messbar sind.

Def. Eine numerische Funktion f auf X heißt $(\mu-)$*integrierbar*, wenn sie messbar ist und wenn $\int f^+ \, d\mu$ und $\int f^- \, d\mu$ endlich sind. Dann schreiben wir

$$\int f \, d\mu := \int_X f(x) \, d\mu(x) := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

und nennen diese reelle Zahl das *Integral* von f.

Satz 3. Sind f, g integrierbare numerische Funktionen auf X, $\alpha \in \mathbb{R}$, so sind auch αf, $f + g$ (falls dies auf ganz X definiert ist), $\sup(f, g)$ und $\inf(f, g)$ integrierbar, und

$$\int (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu\ , \int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

Ist $f \leq g$, so ist $\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$.
Insbesondere ist $|\int f\, d\mu| \leq \int |f|\, d\mu$.

Beispiel 1. Sei X eine Menge, $a \in X$. Betrachte den Maßraum $(X, \mathcal{P}(X), \epsilon_a)$ mit $\epsilon_a(A) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{falls } a \in A \\ 0 & , \quad \text{sonst}\,. \end{cases}$

Integrierbar bezüglich ε_a ist eine Funktion f genau dann, wenn $|f(a)| < \infty$, und dann ist $\int f\, d\varepsilon_a = f(a)$.

Beispiel 2. Sei $X = \mathbb{N}$. Es gibt genau ein Maß μ auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit $\mu(\{n\}) = 1 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Betrachte den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$.
Die numerischen Funktionen auf X sind die Folgen $f = (f(n))_n$ in $\overline{\mathbb{R}}$.
Integrierbar ist eine solche Folge $(f(n))_n$ genau dann, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ absolut konvergent ist. Dann ist $\int f\, d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Def. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.
a) $N \subseteq X$ heißt $\mu-$*Nullmenge*, wenn $N \in \mathcal{A}$ und $\mu(N) = 0$.
b) Ist $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion, so sagen wir: $f = 0$ *fast überall*, wenn es eine Nullmenge N gibt mit $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \subseteq N$.

Satz 4. Für $f \in \mathcal{M}^+$ gilt:

$$\int f\, d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ fast überall.}$$

Folgerung. Zwei integrierbare Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, haben dasselbe Integral.
Wir nenne demgemäß eine Funktion *integrierbar*, wenn sie nach eventueller Ergänzung oder Abänderung auf einer Nullmenge integrierbar ist.

Bezeichnungen:
a) Ist f eine λ^n-integrierbare numerische Funktion auf $\mathbb{R}^n$, so heißt f *Lebesgue-integrierbar*; statt $\int f\, d\lambda^n$ schreibt man auch

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\lambda^n(x) \ \text{ oder } \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \ \text{ oder } \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

und nennt dies das *Lebesgue-Integral* von f.
b) Allgemeiner: Ist $Y \in \mathcal{B}^n$, so sei $\mathcal{B}^n(Y) := \{B \in \mathcal{B}^n \mid B \subseteq Y\}$.
Dann ist $\mathcal{B}^n(Y)$ eine $\sigma-$Algebra in Y. Durch $B \mapsto \lambda^n(B)$ erhält man ein Maß $\lambda^n|Y$ auf $\mathcal{B}^n(Y)$.
Man hat also einen Maßraum $(Y, \mathcal{B}^n(Y), \lambda^n|Y)$.
Ist $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ eine numerische Funktion, die integrierbar bezüglich $\lambda^n \mid Y$ ist, so schreibt man

$$\int\limits_Y f\, d\lambda^n \ \text{ oder } \int\limits_Y f(x)\, d\lambda^n(x) \ \text{ oder } \int\limits_Y f(x)\, dx \ \text{ oder } \int\limits_Y f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

statt $\int f\, d(\lambda^n|Y)$.

6. Die Vertauschbarkeit des Integrals mit Grenzprozessen

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.
Wir kennen bereits den Satz von der monotonen Konvergenz.

Satz 1. ("Lemma von Fatou") Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{M}^+$ und $f := \liminf_{n\to\infty} f_n$. Dann ist $f \in \mathcal{M}^+$ und

$$\int f\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Satz 2. (Satz von der majorisierten Konvergenz)
Sei (f_n) eine Folge integrierbarer $\mathbb{R}$-wertiger Funktionen auf X, die fast überall punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Es gebe eine integrierbare $\mathbb{R}$-wertige Funktion g auf X mit $|f_n(x)| \leq g(x) \;\; \forall\, x \in X, n \in \mathbb{N}$. Dann ist f integrierbar und

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Satz 3. Sei $\mu(X) < \infty$. Sei (f_n) eine Folge $\mathbb{R}$-wertiger integrierbarer Funktionen auf X, die gleichmäßig gegen die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f integrierbar und

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Satz 4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist f Lebesgue-integrierbar, und das Riemann-Integral $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ und das Lebesgue-Integral $\int\limits_{[a,b]} f(x)\, d\lambda^1(x)$ stimmen überein.

Bemerkung. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die *uneigentlich* integrierbar ist im Sinne von Analysis I, ist nicht notwendigerweise Lebesgue-integrierbar, nämlich dann nicht, wenn $|f|$ nicht uneigentlich integrierbar ist, wie es z.B. für die Funktion $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ der Fall ist.

Bezeichnungen: Ist I ein Intervall mit den Endpunkten a, b, wobei $-\infty \leq a < b \leq \infty$, und ist f eine auf I Lebesgue-integrierbare numerische Funktion, so schreibt man $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ statt $\int\limits_I f\, d\lambda^1$.

Wenn man irgendwo $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ liest, ist immer zu klären, ob es sich um das Integral einer Lebesgue-integrierbaren Funktion oder um ein uneigentliches Integral handelt!

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.
Für $t \in I$ sei $f_t : X \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_t(x) := f(t, x)$.
Für $x \in X$ sei $f^x : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $f^x(t) := f(t, x)$.
Wenn f^x an der Stelle t differenzierbar ist, so schreiben wir

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) := (f^x)'(t)$$

und sagen, dass $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ existiert.

Satz 5. $f : I \times X \to \mathbb{R}$ habe die folgenden Eigenschaften:

a) Für alle $t \in I$ ist f_t integrierbar.

b) Für alle $t \in I, x \in X$ existiere $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t, x)$.

c) Es gebe eine integrierbare Funktion g mit

$$\Big| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \Big| \leq g(x) \ \ \forall \, t \in I, x \in X.$$

Definiere $F : I \to \mathbb{R}$ durch

$$F(t) := \int\limits_X f(t, x) \, d\mu(x).$$

Dann gilt:

1) F ist differenzierbar.

2) $(\dfrac{\partial f}{\partial t})_t : X \to \mathbb{R}$ ist integrierbar für $t \in I$.

3) $F'(t) = \displaystyle\int\limits_X \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \, d\mu(x) \ \ \forall \, t \in I.$

7. Der Satz von Fubini

Bezeichnungen: a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $N := n + m$.
Wir schreiben die Elemente von $\mathbb{R}^N$ in der Form (x, y) mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$.
b) Ist $E \subseteq \mathbb{R}^N, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$, so sei

$$E_x := \{\eta \in \mathbb{R}^m \,|\, (x, \eta) \in E\},$$

$$E^y := \{\xi \in \mathbb{R}^n \,|\, (\xi, y) \in E\}.$$

Satz 1. Sei $E \in \mathcal{B}^N$. Dann gilt:

1) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist $E_x \in \mathcal{B}^m$.
2) Die numerische Funktion $x \mapsto \lambda^m(E_x)$ auf $\mathbb{R}^n$ ist messbar.
3) $\lambda^N(E) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \lambda^m(E_x)\, d\lambda^n(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \lambda^n(E^y)\, d\lambda^m(y)$.

Folgerung. (Cavalierisches Prinzip) Seien $E, E' \in \mathcal{B}^N$ mit $\lambda^m(E_x) = \lambda^m(E'_x)$ $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\lambda^N(E) = \lambda^N(E')$.

Satz 2. Sei f eine messbare nicht-negative numerische Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und sei

$$M^f := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 0 \le t < f(x)\}.$$

Dann ist $M^f \in \mathcal{B}^{n+1}$ und

$$\lambda^{n+1}(M^f) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda^n.$$

Beispiel. Das Kugelvolumen. Sei $B_{n,r} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \le r^2\}$. Man zeigt durch Induktion nach n:

$$\lambda^n(B_{n,r}) = \begin{cases} \dfrac{1}{m!}\, \pi^m\, r^{2m} & \text{für} \quad n = 2m \\ \dfrac{2^m}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2m-1)}\, \pi^{m-1}\, r^{2m-1} & \text{für} \quad n = 2m-1. \end{cases}$$

Satz 3. Sei f eine messbare nicht-negative numerische Funktion auf $\mathbb{R}^N$, $N = n+m$. Dann sind die folgenden 4 numerischen Funktionen messbar und nicht negativ:

1) $x \mapsto f(x, y)$ für festes $y \in \mathbb{R}^m$,
2) $y \mapsto f(x, y)$ für festes $x \in \mathbb{R}^n$,
3) $y \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\, d\lambda^n(x)$,
4) $x \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x, y)\, d\lambda^m(y)$,

und es gilt:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x, y)\, d\lambda^N(x, y) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x, y)\, d\lambda^m(y) \Big)\, d\lambda^n(x) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\, d\lambda^n(x) \Big)\, d\lambda^m(y). \end{aligned}$$

Satz 4. (Fubini) Sei f eine integrierbare numerische Funktion auf $\mathbb{R}^N$, $N = n+m$. Für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist dann die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ integrierbar auf $\mathbb{R}^m$, die f.ü. definierte Funktion $x \mapsto \int f(x,y)\, d\lambda^m(y)$ ist integrierbar auf $\mathbb{R}^n$, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\, d\lambda^N(x,y) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, d\lambda^m(y) \Big)\, d\lambda^n(x) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, d\lambda^n(x) \Big)\, d\lambda^m(y).
\end{aligned}$$

Folgerung. Sei f Lebesgue-integrierbar auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda^n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\dots \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\dots,x_n)\, dx_1 \Big) \dots \Big)\, dx_n.$$

Man kann auch jede andere Reihenfolge der Variablen $x_1,\dots,x_n$ benutzen.

Bem. Im Satz von Fubini ist die Voraussetzung, dass f integrierbar ist, wichtig. In vielen Fällen überprüft man für messbares f diese Voraussetzung so:
Man muss zeigen, dass $|f\,|$ integrierbar ist, d.h. dass $\int\limits_{\mathbb{R}^N} |f\,|\, d\lambda^N < \infty$. Dafür rechnet man $\int\limits_{\mathbb{R}^N} |f\,|\, d\lambda^N$ mithilfe von Satz 3 aus.

8. Die Transformationsformel

Def. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und seien U, V offen in $\mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $\varphi : U \to V$ heißt ein C^k-*Diffeomorphismus* von U nach V, wenn gilt:
a) φ ist eine Bijektion,
b) φ ist von der Klasse C^k,
c) $\varphi^{-1} : V \to U$ ist von der Klasse C^k.

Bem. a) C^0-Diffeomorphismus = Homöomorphismus.
b) Ist $\varphi : U \to V$ ein Homöomorphismus und $A \subseteq U$ eine Borel-Menge, so ist $\varphi(A) = (\varphi^{-1})^{-1}(A)$ eine Borel-Menge nach Paragraph 4, Satz 1.

Satz 1. (Transformationsformel) Seien U, V offen in $\mathbb{R}^n$, $\varphi : U \to V$ sei ein C^1-Diffeomorphismus.
a) Ist $A \subseteq U$ eine Borel-Menge, so ist

$$\lambda^n(\varphi(A)) = \int\limits_A |\det D\varphi(x)|\, dx.$$

b) Eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn $|\det D\varphi| \cdot (f \circ \varphi) : U \to \mathbb{R}$ integrierbar ist.
c) Ist $f : V \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist

$$\int\limits_V f(y)\, dy = \int\limits_U f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|\, dx.$$

Beispiel: Ebene Polarkoordinaten. Definiere $\varphi : [0, \infty[\times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ durch $\varphi(r, t) := (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t)$.
Satz 2. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn die Funktion

$$(r, t) \mapsto r \cdot f(\varphi(r, t))$$

über $[0, \infty[\times [0, 2\pi]$ integrierbar ist und dann gilt:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} f(r\cos t, r\sin t) \cdot r\, dr\, dt.$$

Bew. Wende Satz 1 an mit $U :=]0, \infty[\times]0, 2\pi[$, $V := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) | \, x \geq 0\}$.
Dann liefert φ einen C^1-Diffeomorphismus von U auf V, und $\mathbb{R}^2 \setminus V$ und $([0, \infty[\times [0, 2\pi]) \setminus U$ sind Nullmengen.

Anwendung:

$$\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\Big)^2 = \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\Big)\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy\Big)$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r\, dr\, d\varphi$$
$$= 2\pi \int\limits_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r\, dr = 2\pi \left[-\tfrac{1}{2} e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \pi$$
$$\Longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

9. Die Räume L^p

Bezeichnungen: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $p \in [1, \infty[$.
a) Ist f eine messbare numerische Funktion auf X, so sei

$$\| f \|_p := \big(\int | f |^p \, d\mu \big)^{1/p} \in [0, \infty].$$

(Beachte: Mit f sind auch $| f |$ und $| f |^p$ nach § 4 messbar.)
b) $\mathcal{L}^b(X) := \mathcal{L}^b(X, \mathcal{A}, \mu) := \{ f : X \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ ist messbar und } \| f \|_p < \infty \}$.

Bem. $\mathcal{L}^1(X) = \{$ integrierbare $\mathbb{R}$-wertige Funktionen auf $X\}$.

Beispiel: Sei $X = \{1, 2, \ldots, n\}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(X), \mu(\{k\}) = 1 \ \forall\, k \in X$.

Dann sind alle Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$ integrierbar, und $\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} f(i)$. Die Menge aller Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$ kann mit $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden vermöge $f \leftrightarrow (f(1), \ldots, f(n))$. Also $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathbb{R}^n$, und unter dieser Identifikation gilt für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\| x \|_p = \big(\sum_{i=1}^{n} |x_i |^p \big)^{1/p}.$$

Für $p = 1, 2$ erhalten wir daher die bereits in Analysis II mit $\| \,.\, \|_1, \| \,.\, \|_2$ bezeichneten Normen auf $\mathbb{R}^n$.

Satz 1. (Höldersche Ungleichung) Sei $p \in \mathbb{R}$ mit $1 < p < \infty$, und sei q definiert durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Dann gilt für zwei messbare numerische Funktionen f, g auf X:

$$\| fg \|_1 \leq \| f \|_p \cdot \| g \|_q \, .$$

Sind insbesondere $f, g \in \mathcal{L}^2(X)$, so ist fg integrierbar.

Folgerung. Ist $\mu(X) < \infty$, so ist $\mathcal{L}^p(X) \subseteq \mathcal{L}^1(X)$ für $p \geq 1$.

Satz 2. (Minkowskische Ungleichung) Ist $1 \leq p < \infty$ und sind f, g messbare numerische Funktionen auf X, so dass $f + g$ überall definiert ist, so ist

$$\| f + g \|_p \leq \| f \|_p \ + \ \| g \|_p \ .$$

Sind insbesondere $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$, so ist auch $f + g \in \mathcal{L}^p(X)$.
Daher ist $\mathcal{L}^p(X)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Bem. Im Allgemeinen ist $(\mathcal{L}^p(X), \| \,.\, \|_p)$ *kein* normierter Raum, denn es kann Funktionen $f \neq 0$ geben mit $\| f \|_p = 0$.
Nach § 5, Satz 4 ist

$$\{ f \in \mathcal{L}^p(X) \,|\, \| f \|_p = 0 \} = \{ f : X \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ messbar und } f = 0 \text{ f.ü.} \} =: \mathcal{N}(X).$$

Dies ist ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^p(X)$.

Def. $L^p(X) := \mathcal{L}^p(X) / \mathcal{N}(X)$.
Ist $f \in \mathcal{L}^p(X)$, so bezeichne $\tilde{f}$ die Klasse von f in $L^p(X)$.
Durch $\| \tilde{f} \|_p := \| f \|_p$ wird $L^p(X)$ zu einem normierten Raum.

Satz 3. (Fischer-Riesz) Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p(X)$ ein Banach-Raum.

Def. Eine Abbildung $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ heißt *integrierbar*, wenn alle Funktionen $f_i : X \to \mathbb{R}$ integrierbar sind. Schreibe dann

$$\int f\,d\mu := (\int f_1\,d\mu, \ldots, f_n\,d\mu) \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere ist $f : X \to \mathbb{C}$ genau dann integrierbar, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ integrierbar sind, und dann ist

$$\int f\,d\mu = \int \operatorname{Re} f\,d\mu + i \int \operatorname{Im} f\,d\mu.$$

Bem. Sei $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung.

a) Äquivalent sind:

(1) $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ ist messbar.

(2) Alle f_i sind messbar.

b) Äquivalent sind:

(1) f ist integrierbar.

(2) f ist messbar und $\int \parallel f(x) \parallel_2 \, d\mu(x) < \infty$.

Bez. Für $1 \leq p < \infty$ schreibt man

$$\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ ist messbar und } \int |f|^p\,d\mu < \infty\}.$$

Dann ist $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X)$ die Menge der integrierbaren Funktionen $X \to \mathbb{C}$.
Für $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(X)$ sei $\parallel f \parallel_p := (\int |f|^p\,d\mu)^{1/p}$.
$\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(X) := \{f : X \to \mathbb{C} | \, f \text{ ist messbar und } f = 0 \text{ f.ü.}\}$.
$L^p_{\mathbb{C}}(X) := \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(X)/\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(X)$.
$L^p_{\mathbb{C}}(X)$ ist ein komplexer Banach-Raum.

Kapitel II: Fourier-Theorie

10. Die Faltung

Konstruktion: Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Nach Fubini (genauer: nach § 7, Satz 3) gehört die Funktion

$$\mathbb{R}^{2n} \ni (x, y) \mapsto f(x)g(y) \in \mathbb{R}$$

zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{2n})$. Nach der Transformationsformel ist auch

$$(x, y) \mapsto f(x)g(y - x)$$

über $\mathbb{R}^{2n}$ integrierbar. Nach Fubini existiert das Integral

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y - x)\, dx$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit Ausnahme einer Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$. Für $y \in \mathbb{R}^n \setminus N$ schreiben wir:

$$\boxed{(f * g)(y) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y - x)\, dx.}$$

Nach Fubini ist die f.ü. definierte Funktion $f * g$ über $\mathbb{R}^n$ integrierbar. Wir nennen $f * g$ die *Faltung* von f und g. Indem wir die Klasse $\tilde{f} \in L^1$ einer Funktion $f \in \mathcal{L}^1$ wieder mit f bezeichnen, haben wir damit eine bilineare Abbildung

$$* : L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n).$$

Eigenschaften der Faltung:

Eigenschaft 1: $\| f * g \|_1 \leq \| f \|_1 \cdot \| g \|_1$.

Eigenschaft 2: $f * g = g * f$.

Eigenschaft 3: $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Erinnerung: Eine Teilmenge K von $\mathbb{R}^n$ heißt *kompakt*, wenn sie beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ ist.

Def. a) Ist f eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$, so heißt

$$\mathrm{Supp}\,(f) := \text{ Abschluss von } \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \neq 0\}.$$

der *Träger* von f.

b) Ist $k \in \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$, so bezeichnen wir mit $C^k(\mathbb{R}^n)$ die Menge der Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), die von der Klasse C^k sind und mit $C_c^k(\mathbb{R}^n)$ die Menge der $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, die kompakten Träger haben.

$C(\mathbb{R}^n) := C^0(\mathbb{R}^n), C_c(\mathbb{R}^n) := C_c^0(\mathbb{R}^n)$.

Die Elemente von $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißen die *Testfunktionen* auf $\mathbb{R}^n$.

Beispiel: Definiere $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{für} \quad x > 0. \end{cases}$$

Setzt man $h_0(x) := h(1 + x)\, h(1 - x)$, so ist $h_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{Supp}(h_0) = [-1, 1]$. Definiert man $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x_1, \ldots, x_n) := h_0(x_1) \cdot \ldots \cdot h_0(x_n),$$

so ist g eine Testfunktion auf $\mathbb{R}^n$ mit $\text{Supp}(g) = [-1,1]^n$.

Eigenschaft 4: Haben $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ kompakten Träger, so hat auch $f * g$ kompakten Träger.

Eigenschaft 5: Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, so ist $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = f * \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right).$$

Satz 1. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$, d.h. für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gibt es eine Folge von Testfunktionen, die gegen f konvergiert.

Der Rest von § 10 liefert u.a. einen Beweis von Satz 1.

Satz 2. Ist $A \in \mathcal{B}^n$, so ist

$$\lambda^n(A) = \inf\{\lambda^n(U) \,|\, U \text{ ist offen in } \mathbb{R}^n \text{ mit } U \supseteq A\}.$$

Satz 3. Ist $A \in \mathcal{B}^n$, so ist

$$\lambda^n(A) = \sup\{\lambda^n(K) \,|\, K \text{ ist kompakt und } K \subseteq A\}.$$

Satz 4. Sei (g_m) eine Folge in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $g_m \geq 0$.

(2) $\| g_m \|_1 = 1$.

(3) $\text{Supp}(g_m) \subseteq B_{\epsilon_m}(0)$ mit $\epsilon_m \to 0$.

Dann gilt für jedes $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\lim_{m\to\infty} \| g_m * f - f \|_1 = 0.$$

11. Die Fourier-Transformation

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ sei $< x| \, y >= \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \, y_k$ und $\| \, x \, \|= \sqrt{< x| \, x >}$.

Def. Sei $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$(*) \qquad\qquad x \mapsto f(x)e^{-i \, <x| \, \xi>}$$

eine messbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und $| \, f(x)e^{-i<x| \, \xi>} | \, = |f(x)|$.
Deswegen ist $(*)$ integrierbar; schreibe

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i<x| \, \xi>} \, dx$$

und nenne $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ die *Fourier-Transformierte* von f.

Bem.1. Diese Definition bedeutet:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \cos < x| \, \xi > \, dx - i \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \sin < x| \, \xi > \, dx \Big).$$

Ist also $n = 1$ und ist f eine gerade Funktion, also $f(-x) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$, so ist

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f(x) \cos x\xi \, dx.$$

Beispiel 1. Sei $n = 1$ und $f = \chi_{[-1,1]}$. Dann ist

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \xi}{\xi} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}).$$

Beispiel 2. Sei $f(x) = \max(0, 1 - |x \, |)$. Dann ist

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1 - \cos \xi}{\xi^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}).$$

Beispiel 3. Sei f wie in Beispiel 2. Dann ist $\hat{\hat{f}} = f$.

Beispiel 4. Ist $f(x) = e^{-x^2/2}$, so ist $\hat{f} = f$.

Beispiel 5. Sei r eine feste Zahl > 0. Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und

$$g(x) := r \, f(rx),$$

so ist $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi/r)$.

Beispiel 6. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $g_k(x) := \max(0, k - k^2|x \, |)$. Aus den vorangegangenen Beispielen folgt: $\hat{\hat{g}}_k = g_k$.

Bem.2. Ist $f \in \mathcal{L}^1$, so ist $\hat{f}$ stetig.

Bem.3. Ist $f \in \mathcal{L}^1$, so ist $\hat{f}$ beschränkt mit

$$|\hat{f}(\xi)| \, \leq \, \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \| \, f \, \|_1 \quad \forall \, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Satz 1. a) Ist $f \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ und $1 \leq k \leq n$, so ist

$$\big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\big)^\wedge(\xi_1, \ldots, \xi_n) = i\xi_k \hat{f}(\xi_1, \ldots, \xi_k).$$

b) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $1 \leq k \leq n$.
Die Funktion $x \mapsto x_k f(x)$ sei integrierbar; wir bezeichnen sie mit $x_k f$. Dann existiert $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k}$, und es gilt:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k} = -i(x_k f)^\wedge.$$

Satz 2. Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, so ist $\lim\limits_{\|\xi\| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Satz 3. Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, so ist $(f * g)^\wedge = (2\pi)^{n/2} \hat{f}\hat{g}$.

Satz 4. (Umkehrformel der Fourier-Theorie)
Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, e^{i<x|\,\xi>}\, d\xi$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.
Bez. Für $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ heißt die stetige Funktion $\check{g}$ mit

$$\check{g}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\, e^{i<\xi|\,x>}\, d\xi$$

die *inverse Fourier-Transformierte* von g.

Bem.4. Mit dieser Bezeichnung lautet die Umkehrformel:
Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist $f = \check{\hat{f}}$.

Bem.5. Ist $n = 1$ und ist f eine gerade Funktion, so ist $\hat{f} = \check{f}$; ist f eine ungerade Funktion, so ist $\hat{f} = -\check{f}$.

Bem.6. Sind $f, g \in \mathcal{L}^1$, so sind $\hat{f}g$ und $f\hat{g}$ integrierbar und $\int \hat{f}g = \int f\hat{g}$.

Bem.7. Ist $g \in \mathcal{L}^1$, so ist $\overline{\check{g}} = \hat{\overline{g}}$.

Bem.8. Ist $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, so ist $\| \hat{f} \|_2 = \| f \|_2$.

Erinnerung an die Lineare Algebra:

Def. Sei H ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$). Eine *hermitesche Form* auf H ist eine Abbildung $(x, y) \mapsto (x|\,y)$ von $H \times H$ nach $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) mit folgenden Eigenschaften:

a) $(x + x'|\,y) = (x|\,y) + (x'|\,y)$ für $x, x', y \in H$.

b) $(\alpha x|\,y) = \alpha(x|\,y)$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$),$x, y \in H$.

c) $(y|\,x) = \overline{(x|\,y)}$ für $x, y \in H$.

Bem. Für eine hermitesche Form $(.|\,.)$ auf H gilt:

$$(x|\,y + y') = (x|\,y) + (x|\,y')$$
$$(x|\,\alpha y) = \overline{\alpha}(x|\,y)$$
$$(x|\,x) \in \mathbb{R}\ .$$

Def. Eine hermitesche Form $(.|\,.)$ auf H heißt ein *Skalarprodukt*, wenn zusätzlich gilt:

d) $(x|\,x) \geq 0$ für $x \in H$.

e) Ist $x \neq 0$, so ist $(x|\,x) > 0$.

Beispiel: $\mathbb{C}^n$ mit $(x|\,y) := \sum_{j=1}^{n} x_j\,\overline{y_j}$.

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: Ist $(.|\,.)$ ein Skalarprodukt, so

$$|\,(x|\,y)|^2 \leq (x|\,x) \cdot (y|\,y) \;\; \forall\, x, y.$$

Folgerung: Ist $(.|\,.)$ ein Skalarprodukt auf H, so erhält man eine Norm auf H durch

$$\parallel x \parallel := \sqrt{(x|\,x)}.$$

Def. Sei H ein Raum mit Skalarprodukt. Wenn H mit der Norm $\parallel x \parallel = \sqrt{(x|\,x)}$ ein Banach-Raum ist, so heißt H ein *Hilbert-Raum*.

Beispiel: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist $L^2_{\mathbb{C}}(X)$ ein komplexer Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$(f|\,g) := \int f\overline{g}\,d\mu.$$

(Nach der Hölderschen Ungleichung ist $f\overline{g}$ integrierbar; nach Fischer-Riesz ist $L^2_{\mathbb{C}}(X)$ ein Hilbert-Raum.)
Ebenso ist $L^2_{\mathbb{R}}(X)$ ein reeller Hilbert-Raum.

Spezialfälle: 1) Ist $X = \{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ und $\mu(\{k\}) = 1 \;\; \forall\, k \in X$, so ist $L^2_{\mathbb{C}}(C) = \mathbb{C}^n$ und $L^2_{\mathbb{R}}(X) = \mathbb{R}^n$ mit dem üblichen Skalarprodukt.
2) Ist $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $\mu(\{k\}) = 1 \; \forall\, k \in \mathbb{N}$, so ist

$$L^2_{\mathbb{C}}(X) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} |\, x_n \in \mathbb{C} \text{ und } \sum_n |x_n\,|^2 < \infty\}$$

mit dem Skalarprodukt $((x_n)|\,(y_n)) = \sum_n x_n\,\overline{y_n}$.
Diesen Hilbert-Raum bezeichnet man mit $l^2_{\mathbb{C}}$. Entsprechend hat man $l^2_{\mathbb{R}}$.

Def. Seien H_1 und H_2 zwei Vektorräume mit Skalarprodukt (beide über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$). Ein linearer Isomorphismus $\varphi : H_1 \to H_2$ mit $\parallel \varphi(x) \parallel = \parallel x \parallel$ für $x \in H_1$ heißt eine *Isometrie* von H_1 auf H_2.

Satz 5. (Satz von Plancherel) Es gibt eine eindeutig bestimmte Isometrie

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

mit $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$.

Notation: Meist schreibt man auch $\hat{f}$ statt $\mathcal{F}(f)$ für die $f \in L^2$, die nicht in L^1 liegen.

12. Distributionen

Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.
Für einen Multi-Index $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n$ sei

$$\mathrm{D}^\nu : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$$

definiert durch

$$\mathrm{D}^\nu f := \frac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_n} f}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_n^{\nu_n}}.$$

Def. Sei K eine kompakte Teilmenge von U.

a) $\mathcal{D}(U;K) := \{f \in C_{\mathbb{C}}^\infty(U) |\ \mathrm{supp}(f) \subseteq K\}$.

b) Ist (φ_k) eine Folge in $\mathcal{D}(U;K)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(U;K)$, so sagen wir, dass (φ_k) in $\mathcal{D}(U;K)$ gegen φ konvergiert, wenn für jeden Multi-Index ν die Folge $(\mathrm{D}^\nu \varphi_k)$ gleichmäßig gegen $\mathrm{D}^\nu \varphi$ konvergiert.

c) Ist X ein metrischer Raum und $h : \mathcal{D}(U;K) \to X$ eine Abbildung, so heißt h *stetig*,wenn gilt:
Konvergiert die Folge (φ_k) in $\mathcal{D}(U;K)$ gegen φ, so konvergiert $(h(\varphi_k))$ in X gegen $h(\varphi)$.

Def. $\mathcal{D}(U) := \bigcup\limits_K \mathcal{D}(U;K)$,wobei K alle kompakten Teilmengen von U durchläuft.
Die Elemente von $\mathcal{D}(U)$ heißen die *Testfunktionen* auf U.

Def. Eine *Distribution* auf U ist eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{D}(U) & \to & \mathbb{C} \\ & \varphi & \mapsto & < T, \varphi >, \end{array}$$

die die folgende Eigenschaft hat: Für jede kompakte Teilmenge K von U ist die Einschränkung von T auf $\mathcal{D}(U;K)$ stetig.
Mit $\mathcal{D}'(U)$ bezeichnen wir den $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Distributionen auf U.

Beispiel 1: Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *lokal integrierbar*, wenn für jede kompakte Teilmenge K von U die Funktion $f \cdot \chi_K$ Lebesgue-integrierbar ist. Mit $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(U)$ bezeichnen wir den $\mathbb{C}$-Vektorraum der lokal integrierbaren Funktionen auf U. Jede stetige Funktion ist lokal integrierbar.

$$\mathcal{L}^p(U) \subseteq \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(U) \ \ \forall\, p \geq 1.$$

Ist $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(U)$, so definiert man eine Distribution $T_f \in \mathcal{D}'(U)$ durch

$$< T_f, \varphi > := \int\limits_U f(x)\varphi(x)\, dx.$$

Sind $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(U)$, so gilt:

$$T_f = T_g \Leftrightarrow f = g \ \text{ f.ü..}$$

Setzt man also $L^1_{\mathrm{loc}}(U) := \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(U)/\mathcal{N}(U)$, wobei $\mathcal{N}(U)$ der Raum aller f.ü. verschwindenden messbaren Funktionen auf U ist, so erhält man eine injektive lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} L^1_{\mathrm{loc}}(U) & \to & \mathcal{D}'(U) \\ f & \mapsto & T_f. \end{array}$$

Deswegen nennt man Distributionen auch *verallgemeinerte Funktionen.*

Beispiel 2: Sei μ ein Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{B}(U)$ aller in U enthaltenen Borel-Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Für jede kompakte Teilmenge K von U sei $\mu(K) < \infty$. (Man nennt dann μ ein *Borel-Maß* auf U.)
Man erhält eine wieder mit μ bezeichnete Distribution auf U durch

$$< \mu, \varphi > := \int_U \varphi(x)\, d\mu(x).$$

Spezialfall: Sei $a \in U$ und ε_a das Dirac-Maß im Punkt a, also

$$\varepsilon_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann haben wir die *Dirac-Distribution* ε_a auf U,

$$< \varepsilon_a, \varphi > = \varphi(a) \ \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

Def. Ist $T \in \mathcal{D}'(U)$ und $\nu \in \mathbb{N}_0^n$, so definiert man $\mathrm{D}^\nu T \in \mathcal{D}'(U)$ durch

$$< \mathrm{D}^\nu T, \varphi > := (-1)^{\nu_1 + \ldots + \nu_n} \ < T, \mathrm{D}^\nu \varphi > .$$

Bem. Ist $f \in C^r(U)$ und $\nu_1 + \ldots + \nu_n \leq r$, so folgt mit partieller Integration:

$$\mathrm{D}^\nu T_f = T_{\mathrm{D}^\nu f} \ .$$

Beispiel: Sei $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $H(x) := 0$, falls $x < 0$ und $H(x) := 1$, falls $x \geq 0$. Dann ist

$$\mathrm{D}T_H = \varepsilon_0.$$

Bem. Man kann nicht von *allen* Distributionen in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ die Fourier-Transformierte bilden, sondern nur von einer Teilklasse:

Def. Die *schnell fallenden Funktionen* oder *Schwartzschen Funktionen* auf $\mathbb{R}^n$ sind die Elemente von

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,|\, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \parallel x \parallel^m) \cdot |\, \mathrm{D}^\nu f(x) \,| < \infty \ \ \forall\, m \in \mathbb{N}\,,\, \nu \in \mathbb{N}_0^n \}.$$

Es gilt:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n).$$

Die Fourier-Transformation liefert eine Bijektion von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf sich.

Def. a) Eine Folge (φ_k) in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, wenn für jedes m und jedes ν die Folge der Funktionen $x \mapsto (1 + \parallel x \parallel^m)\, \mathrm{D}^\nu \varphi_k(x)$ für $k \to \infty$ gleichmäßig gegen die Funktion $x \mapsto (1 + \parallel x \parallel^m)\, \mathrm{D}^\nu \varphi(x)$ konvergiert.
b) Ist X ein metrischer Raum, so heißt eine Abbildung $h : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to X$ stetig, wenn für jede Folge (φ_k), die in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gegen φ konvergiert, die Folge $(h(\varphi_k))$ in X gegen $h(\varphi)$ konvergiert.

Def. Sei $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathbb{C} \\ & \varphi & \mapsto & < T, \varphi > . \end{array}$$

Bem. Indem man $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ einschränkt, erhält man eine injektive lineare Abbildung

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\,;$$

man betrachtet die Elemente von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ als Elemente von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und nennt sie *temperierte Distributionen.*

Def. Ist $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, so definiert man $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ durch

$$< \hat{T}, \varphi > := < T, \hat{\varphi} > \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

und nennt $\hat{T}$ die *Fourier-Transformierte* von T.

Bem. $\mathcal{S}'$ ist viel größer als L^1 und L^2.

Beispiel: Sei 1 die konstante Funktion auf $\mathbb{R}$ mit Wert 1. Dann ist $T_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und

$$\hat{T}_1 = \sqrt{2\pi} \cdot \varepsilon_0 \;\;, \quad \hat{\varepsilon}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot T_1 \,.$$

13. Hilbert-Räume

Sei H ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $(.|.)$ und zugehöriger Norm $\| . \|$.

Def. a) Eine Familie $(e_j)_{j\in J}$ von Elementen von H heißt ein *Orthonormalsystem*(ONS), wenn

$$(e_i \,|\, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j, \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j. \end{cases}$$

b) Ein ONS (e_j) heißt *vollständig* oder eine *Hilbert-Basis* von H, wenn die lineare Hülle V der Menge $\{e_j \mid j \in J\}$ dicht in H ist, wenn es also für jedes $x \in H$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $a \in V$ gibt mit

$$\| x - a \| < \varepsilon.$$

Bemerkung 1. Ein ONS (e_j) ist linear unabhängig.

Satz 1. Ist $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ ein ONS in H und V die lineare Hülle von $\{e_j \mid 1 \leq j \leq n\}$, so gibt es zu jedem $x \in H$ genau ein $y \in V$ mit

$$\| x - y \| = \inf\{\| x - z \| \mid z \in V\}.$$

Für dieses y gilt: $y = \sum\limits_{j=1}^{n} (x|\, e_j) e_j$ und

$$\| x - y \|^2 = \| x \|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\, (x|e_j)\, |^2.$$

Satz 2. (Besselsche Ungleichung) Sei $(e_j)_{j\in J}$ ein ONS in H und $x \in H$. Dann ist $(x \mid e_j) \neq 0$ für höchstens abzählbar viele j und

$$\sum_j |\, (x|\, e_j)\, |^2 \leq \| x \|^2 .$$

Def. Eine Familie $(x_j)_{j\in J}$ von Elementen von H heißt *summierbar*, wenn es ein Element $x \in H$ gibt, so dass gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Teilmenge E von J, so dass

$$\| x - \sum_{j\in K} x_j \| < \varepsilon$$

für jede endliche Menge K mit $E \subseteq K \subseteq J$. Das Element x ist dann eindeutig bestimmt; man schreibt $x = \sum\limits_{j\in J} x_j$.

Bemerkung 2. Eine endliche Familie ist summierbar.

Bemerkung 3. Für eine Familie $(x_j)_{j\in J}$ in H sind äquivalent:

a) (x_j) ist summierbar.

b) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Teilmenge E von J, so dass $\| \sum\limits_{j\in L} x_j \| < \varepsilon$ für jede endliche Teilmenge L von J mit $E \cap L = \emptyset$.

Bemerkung 4. Ist (x_j) summierbar, so sind höchstens abzählbar viele $x_j \neq 0$.

Bemerkung 5. Ist J abzählbar, so sind äquivalent:

a) (x_j) ist summierbar mit $\sum\limits_j x_j = x$.

b) Für jede Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to J$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = x$.

Bemerkung 6. Ist $H = \mathbb{C}$, so ist die Familie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann summierbar, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ absolut konvergent ist.

Satz 3. Sei $(e_j)_{j\in J}$ ein ONS in H und $\lambda_j \in \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) für $j \in J$. Dann sind äquivalent:

a) Es gibt ein $x \in H$ mit $(x|\, e_j) = \lambda_j \quad \forall\, j \in J$.

b) $\sum\limits_{j\in J} |\lambda_j\,|^2 < \infty$.

Satz 4. Sei $(e_j)_{j\in J}$ ein ONS in H. Dann sind äquivalent:

a) $(e_j)_{j\in J}$ ist vollständig.

b) Für jedes $x \in H$ ist die Familie $((x|\, e_j)e_j)_{j\in J}$ summierbar und $x = \sum\limits_{j\in J} (x|\, e_j)e_j$.

c) Für alle $x, y \in H$ ist $(x|\, y) = \sum\limits_{j\in J} (x|\, e_j)(e_j|\, y)$.

d) Für alle $x \in H$ ist $\|\, x\,\|^2 = \sum\limits_{j\in J} |\,(x|\, e_j)|^2$.

e) $(e_j)_{j\in J}$ ist ein maximales ONS.

f) Ist $x \in H$ und $(x|\, e_j) = 0 \;\; \forall\, j \in J$, so ist $x = 0$.

Beispiel: In $H = l^2$ ist $e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots),\ e_2 = (0, 1, 0, 0, 0, \ldots), \ldots$ ein vollständiges ONS.

14. Fourier-Reihen

Satz 1. Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $\varphi_n : [-1,1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\varphi_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{\pi i n x}.$$

Dann ist $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ein vollständiges ONS in $L^2_{\mathbb{C}}[-1,1]$.

Def. und Bem. Sei $\mathcal{P}$ der komplexe Untervektorraum des Raumes aller Funktionen $[-1,1] \to \mathbb{C}$, der von den φ_n erzeugt wird. Die Elemente von $\mathcal{P}$, also die *endlichen* komplexen Linearkombinationen der φ_n, heißen die *trigonometrischen Polynome.* Satz 1 besagt: Die trigonometrischen Polynome liegen dicht in $L^2_{\mathbb{C}}[-1,1]$.

Für den Beweis von Satz 1 braucht man die folgenden drei Hilfssätze:
Lemma 1. Ist $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}[-1,1]$ und definiert man $F : [-1,1] \to \mathbb{C}$ durch $F(t) := \int\limits_{-1}^{t} f(x)\,dx$, so ist F stetig.

Lemma 2. (Partielle Integration) Seien $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}[-1,1]$.
Definiere $F, G : [-1,1] \to \mathbb{C}$ durch

$$F(t) := \int_{-1}^{t} f(x)\,dx \ \ , \ G(t) := \int_{-1}^{t} g(x)\,dx.$$

Dann liegen Fg und fG in $\mathcal{L}^1$ und

$$\int_{-1}^{1} F(x)g(x)\,dx = F(1)G(1) - \int_{-1}^{1} f(x)G(x)\,dx.$$

Lemma 3. Sei $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}[-1,1]$ mit $\int\limits_{-1}^{t} f(x)\,dx = 0$ für $t \in [-1,1]$. Dann ist $f = 0$ f.ü..

Folgerungen: a) Man erhält eine Isometrie von l^2 auf $L^2[-1,1]$ durch $e_1 \mapsto \varphi_0, e_2 \mapsto \varphi_1, e_3 \mapsto \varphi_{-1}, e_4 \mapsto \varphi_2, \ldots$.
b) Für $f \in L^2[-1,1]$ ist $f = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} (f|\,\varphi_n)\varphi_n$ in L^2 und

$$\| f \|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\,(f|\,\varphi_n)\,|^2. \qquad \text{(1. Parsevalsche Gleichung)}$$

c) Für $f, g \in L^2[-1,1]$ gilt:

$$(f|\,g) = \sum_n (f|\,\varphi_n)\overline{(g|\,\varphi_n)}. \qquad \text{(2. Parsevalsche Gleichung)}$$

Bem. Man kann zeigen: Für $f \in L^2[-1,1]$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_n (f|\,\varphi_n)\varphi_n(x)$ punktweise f.ü. gegen $f(x)$ (L.Carleson,1966).
Dabei bedeutet hier und im Folgenden $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n\varphi_n(x) = f(x)$, dass

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n\varphi_n(x) = f(x).$$

Folgerung: Die Funktionen

$$\begin{aligned} x &\mapsto \cos \pi n x \qquad &, n \in \mathbb{N} \\ x &\mapsto \sin \pi n x \qquad &, n \in \mathbb{N} \\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

bilden ein vollständiges ONS in dem reellen Hilbert-Raum $L^2_{\mathbb{R}}[-1,1]$.
Für $f \in L^2_{\mathbb{R}}[-1,1]$ heißen

$a_0(f) := \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx,$

$a_n(f) := \int\limits_{-1}^{1} f(x) \cos \pi n x\,dx$, $b_n(f) := \int\limits_{-1}^{1} f(x) \sin \pi n x\,dx$, $n \in \mathbb{N}$
die *reellen Fourier-Koeffizienten* von f. Es ist
$f(x) = \frac{a_0(f)}{\sqrt{2}} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos \pi n x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(f) \sin \pi n x$ im L^2-Sinn.
Ist f eine gerade Funktion, so ist $b_n = 0 \;\; \forall\, n$;
ist f eine ungerade Funktion, so ist $a_n = 0 \;\; \forall\, n$.

Def. a) Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *stückweise* C^1, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$, Zahlen $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und C^1-Funktionen $g_i : U_i \to \mathbb{R}$ gibt, wobei U_i offen in $\mathbb{R}$ mit $[t_{i-1}, t_i] \subset U_i$ ist, so dass $g_i|\,]\,t_{i-1}, t_i\,[= f|\,]\,t_{i-1}, t_i\,[$.
b) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *stückweise* C^1, wenn f auf jedem kompakten Intervall stückweise C^1 ist. Man setzt dann $f(x+) := \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t > x}} f(t)$, $\quad f(x-) := \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t < x}} f(t)$ für $x \in \mathbb{R}$. (Ist f stetig in x, so ist $f(x+) = f(x-) = f(x)$.)

Satz 2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von der Periode 2 und stückweise C^1. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (f|\,\varphi_n) \cdot \varphi_n(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)).$$

Für den Beweis braucht man die folgenden beiden Hilfssätze:
Lemma 4. (Lemma von Riemann) Ist $f \in \mathcal{L}^1[a,b]$, so ist

$$\lim_{c \to \infty} \int_a^b f(x) \sin cx\,dx = 0.$$

Lemma 5. (Lemma von Dirichlet) Sei $D_n(x) := \frac{1}{2} \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ik\pi x}$.
Ist $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ stückweise C^1, so

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} f(x) D_n(x)\,dx = \frac{1}{2}(f(0-) + f(0+)).$$

Beispiel: Sei $f(x) = x$ für $-1 \le x < 1$, periodisch fortgesetzt. Dann ist

$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sin \pi n x}{n}$, falls x keine ungerade Zahl ist.
Für $x = \frac{1}{2}$ erhalten wir:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \ldots .$$

Kapitel III. Vektoranalysis

15. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$

Erinnerung: Sei $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und seien $N, n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq n \leq N$. Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^N$ heißt *n-dimensionale Untermannigfaltigkeit* des $\mathbb{R}^N$ der Klasse C^p, wenn es für jedes $a \in M$ eine offene Umgebung V von a in M, eine offene Teilmenge W in $\mathbb{R}^n$ und eine Abbildung $\varphi : W \to \mathbb{R}^N$ der Klasse C^p gibt, so dass gilt:

a) Rang $D\varphi(x) = n$ für alle $x \in W$.

b) φ bildet W homöomorph auf V ab.

Ein solches φ, aufgefasst als Abbildung $W \to V$, heißt eine *lokale Parameterdarstellung* oder eine *Karte* von M. Statt Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1 sagen wir einfach Untermannigfaltigkeit.

Beispiele und Bezeichnungen: 1) Die N-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$ sind die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^N$.

2) Die 1-dim. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$ heißen *Kurven*, die 2-dim. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$ heißen *Flächen* in $\mathbb{R}^N$.

3) Eine $(N-1)$-dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ heißt eine *Hyperfläche* in $\mathbb{R}^N$. Zum Beispiel ist $S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_1^2 + \ldots + x_N^2 - 1 = 0\}$ eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^N$.

Satz Sei M eine n-dim.Untermannigfaltigkeit der Klasse C^p von $\mathbb{R}^N$ und seien $\varphi_j : W_j \to V_j$ $(j = 1, 2)$ zwei Karten von M der Klasse C^p. Sei $V := V_1 \cap V_2$ und $U_j := \varphi_j^{-1}(V)$, $j = 1, 2$.
Dann sind die U_j offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, und die Abbildung

$$\tau(\varphi_2, \varphi_1) := (\varphi_2 \,|\, U_2)^{-1} \circ (\varphi_1 \,|\, U_1) : U_1 \to U_2$$

ist ein C^p-Diffeomorphismus. Er heißt die zu den Karten φ_1 und φ_2 gehörige *Parametertransformation*.

Def. Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$, sei $a \in M$ und sei $\varphi : W \to V$ eine Karte von M mit $a \in V$. Setze $b := \varphi^{-1}(a)$.
Sei $T_a(M)$ der Untervektorraum von $\mathbb{R}^N$, der erzeugt wird von

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(b), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(b) \,.$$

Er hat die Dimension n und hängt nicht von der Wahl der Karte φ ab.
$T_a(M)$ heißt der *Tangentialraum* von M im Punkt a.

$N_a(M) := T_a(M)^\perp$ heißt der *Normalraum* von M im Punkt a.

Beispiel: Ist $a \in S^{N-1}$, so ist $N_a(S^{N-1}) = \mathbb{R} \cdot a$ und $T_a(S^{N-1}) = a^\perp$.

Def. Seien U, V offen in $\mathbb{R}^n$ und $\varphi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Ist $\det D\varphi(x) > 0$ für alle $x \in U$, so heißt φ *orientierungstreu*.

Def. Sei M eine n-dim. Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$.

a) Eine Menge $\{\varphi_j : W_j \to V_j \mid j \in J\}$ von Karten von M heißt *Atlas* von M, falls $M = \bigcup\limits_j V_j$.

b) Zwei Karten φ_1, φ_2 heißen *gleich orientiert*, wenn $\tau(\varphi_2, \varphi_1)$ orientierungstreu ist.

c) Ein Atlas von M heißt *orientiert*, wenn je zwei seiner Karten gleich orientiert sind.

d) M heißt *orientierbar*, wenn M einen orientierten Atlas besitzt.

Bem. und Def. Sei M eine n-dim. orientierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$ mit $n \geq 1$. Wir wollen definieren, was eine Orientierung von M ist.

a) Dazu sei M zunächst zusammenhängend. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}$ die Menge aller orientierten Atlanten von M. Dann ist $\mathfrak{A}$ die disjunkte Vereinigung von zwei nichtleeren Teilmengen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, so dass gilt: Ist $i \in \{1,2\}$ und sind $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathfrak{A}_i$, so ist $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ ein orientierter Atlas von M.

Wir nennen dann $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ die beiden *Orientierungen* von M.

b) Ist M nicht notwendig zusammenhängend, so besteht eine *Orientierung* von M in der Wahl einer Orientierung für jede Zusammenhangskomponente von M.

c) Eine *orientierte Untermannigfaltigkeit* von $\mathbb{R}^N$ ist ein Paar $(M, \mathfrak{O})$, wobei M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$ und $\mathfrak{O}$ eine Orientierung von M ist. Man schreibt meist M statt $(M, \mathfrak{O})$.

Bem. Man kann zeigen: Jede zusammenhängende Kurve in $\mathbb{R}^N$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}$ oder zu S^1 und ist orientierbar.

Def. Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$.

a) Ein *Vektorfeld* auf M ist eine Abbildung $X : M \to \mathbb{R}^N$ mit $X(a) \in T_a(M)$ für alle $a \in M$.

b) Ein *Normalenfeld* auf M ist eine Abbildung $\nu : M \to \mathbb{R}^N$ mit $\nu(a) \in N_a(M)$ für alle $a \in M$. Ist $\| \nu(a) \| = 1$ für alle a, so heißt ν ein *Einheitsnormalenfeld* auf M.

Bem. Ist M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ und $a \in M$, so gibt es genau zwei Vektoren $v \in N_a(M)$ mit $\| v \| = 1$. Sei M orientiert, sei $\mathcal{A}$ ein Atlas von M, der zur Orientierung gehört, sei $\varphi : W \to V$ eine Karte in $\mathcal{A}$ mit $a \in V$ und sei $b := \varphi^{-1}(a)$. Dann bilden

$$v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(b), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(b)$$

eine Basis von $\mathbb{R}^{n+1}$ für jeden dieser beiden Vektoren v. Für genau einen von ihnen, den wir mit $\nu(a)$ bezeichnen, ist

$$\det\big(\nu(a), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(b), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(b)\big) > 0 \,.$$

$\nu(a)$ hängt nur von der Orientierung $\mathfrak{O}$, nicht von der Wahl der Karte ab. Die Abbildung $\nu_{\mathfrak{O}} := \nu$ ist stetig. So sieht man:

Satz 1. Sei M eine n-dim. Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$.

a) Genau dann ist M orientierbar, wenn es ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf M gibt.

b) Durch $\mathfrak{O} \mapsto \nu_{\mathfrak{O}}$ erhält man eine Bijektion von der Menge der Orientierungen von M auf die Menge der stetigen Einheitsnormalenfelder auf M.

Bez.:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n_- &:= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 \leq 0\}, \\ \partial\mathbb{R}^n_- &:= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 = 0\}. \end{aligned}$$

Def. Sei M eine n-dim. Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$ und $X \subseteq M$.

a) Mit ∂X bezeichnen wir den Rand von X in M, also alle Punkte a von M, so dass für jede Umgebung U von a in $\mathbb{R}^N$ gilt: $U \cap X \neq \emptyset$ und $U \cap (M \setminus X) \neq \emptyset$.

b) X heißt eine n-dim. *abgeschlossene Untermannigfaltigkeit mit Rand* von M, wenn es zu jedem $a \in \partial X$ eine Karte $\varphi : W \to V$ von M gibt, so dass gilt:

$$\begin{array}{ll} 1) & a \in V, \\ 2) & \varphi(\mathbb{R}^n_- \cap W) = X \cap V, \\ 3) & \varphi(\partial\mathbb{R}^n_- \cap W) = \partial X \cap V. \end{array}$$

Eine solche Karte heißt *randadaptiert* bezüglich X.

Bem. und Def. Sei M eine n-dim. Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$ und X eine n-dim. abgeschlossene Untermannigfaltigkeit mit Rand von M.

a) $\partial X \subseteq X$.

b) Es gibt einen Atlas $\mathcal{A}$ von M, so dass jede Karte $\varphi : W \to V$ aus $\mathcal{A}$ mit $V \cap \partial X \neq \emptyset$ randadaptiert bezüglich X ist. Ein solcher Atlas von M heißt *randadaptiert* bezüglich X.

c) ∂X ist eine $(n-1)$-dim. Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$:
Sei $\mathcal{A}$ ein bezüglich X randadaptierter Atlas von M. Ist $\varphi : W \to V$ eine Karte aus $\mathcal{A}$ mit $V \cap \partial X \neq \emptyset$, so sei

$$\begin{array}{l} V_0 := \partial X \cap V, \\ W_0 := \{(x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (0, x_2, \ldots, x_n) \in W\}, \\ \varphi_0 : W_0 \to V_0 \text{ gegeben durch } \varphi_0(x_2, \ldots, x_n) := \varphi(0, x_2, \ldots, x_n). \end{array}$$

Dann ist $\varphi_0 : W_0 \to V_0$ eine Karte von ∂X, und die Menge $\mathcal{A}_0$ aller dieser Karten heißt der zu $\mathcal{A}$ gehörige Atlas von ∂X.

d) Ist $\mathcal{A}$ ein orientierter, bezüglich X randadaptierter Atlas von M, so ist der zugehörige Atlas $\mathcal{A}_0$ von ∂X orientiert. Jede Orientierung von M liefert so eine Orientierung von ∂X, die *induzierte Orientierung*.

16. Integration auf Kurven und Flächen

Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$. Sei $\mathcal{B}_M$ die σ-Algebra in M, die aus allen Teilmengen A von M besteht, für die gilt: Für jede Karte $\varphi : W \to V$ von M ist $\varphi^{-1}(V \cap A) \in \mathcal{B}^n$.

Def. Eine Teilmenge A von M heißt *klein*, wenn A im Bild einer Karte liegt.

Bem. M ist disjunkte Vereinigung von abzählbar vielen kleinen Teilmengen $A_1, A_2, \ldots$, die in $\mathcal{B}_M$ liegen.

Ziel: Konstruktion eines Maßes λ_M auf $\mathcal{B}_M$, das nicht von der Wahl eines Atlas abhängt. Wegen der vorangehenden Bemerkung genügt es, $\lambda_M(A)$ für kleine Teilmengen $A \in \mathcal{B}_M$ zu definieren.

Spezialfall $n = 1$: Sei M eine Kurve in $\mathbb{R}^N$ und $\varphi : W \to V$ eine Karte von M. Für ein $A \in \mathcal{B}_M$ mit $A \subseteq V$ sei

$$\lambda_M(A) := \int_{\varphi^{-1}(A)} \| \varphi' \| \, d\lambda^1 \, .$$

Dies ist wohldefiniert. (Vergleiche Bogenlänge in Analysis II.) Meist schreibt man ds statt $d\lambda_M$.

Ist $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die $\chi_A \cdot f$ integrierbar ist (z.B. sei f stetig mit kompaktem Träger), so ist

$$\int_A f \, ds = \int_{\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(x)) \, \| \varphi'(x) \| \, dx \, .$$

Spezialfall $n = 2$, $N = 3$ (Flächen im Raum): Das *Kreuzprodukt* ist fogendermaßen definiert: Sind $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, so ist

$$a \times b := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \, .$$

Die Abbildung $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist bilinear und hat folgende Eigenschaften:

a) $\times$ ist alternierend, also $a \times b = -b \times a$.

b) $a \times a = 0$ für alle a.

c) Sind a, b linear unabhängig, so steht $a \times b$ senkrecht auf der von a und b aufgespannten Ebene und $\| a \times b \|$ ist der Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Ecken $0, a, b, a + b$.

Sei M eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ und $\varphi : W \to V$ eine Karte von M. Dann sind $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ stetige Abbildungen von W in $\mathbb{R}^3$. Deshalb ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} : W \to \mathbb{R}^3$$

stetig; es ist überall ungleich 0. Für $A \in \mathcal{B}_M$ mit $A \subseteq V$ sei

$$\lambda_M(A) := \int_{\varphi^{-1}(A)} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| d\lambda^2 \, .$$

Dies ist wohldefiniert. Meist schreibt man dF statt $d\lambda_M$.

Ist $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die $\chi_A \cdot f$ integrierbar ist (z.B. sei f stetig mit kompaktem Träger), so ist

$$\int_A f \, dF = \int_{\varphi^{-1}(A)} (f \circ \varphi) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| d\lambda^2 \, .$$

Bem. Sei M eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ und $A \in \mathcal{B}_M$. Genau dann ist A eine Nullmenge, wenn gilt: Für jede Karte $\varphi : W \to V$ eines Atlas von M ist $\lambda^2(\varphi^{-1}(A \cap V)) = 0$.

Beispiel: Ist $M = S^2$, so ist der Äquator eine Nullmenge.

Wichtige Situation: Sei W offen in $\mathbb{R}^2$ und $g : W \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^1. Wir definieren $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\varphi(x, y) := (x, y, g(x, y)) \, .$$

Dann ist $M := \varphi(W)$ eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit Flächeninhalt

$$\lambda_M(M) = \int_W \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1} \; dx \, dy \, .$$

Beispiel: Die Einheitssphäre S^2 hat den Flächeninhalt 4π.

17. Die klassischen Integralsätze von Gauß und Stokes

Bezeichnung: Ist U offen in $\mathbb{R}^3$, so sei $\mathfrak{V}(U)$ der Vektorraum aller glatten Vektorfelder auf U, d.h. aller C^∞-Abbildungen

$$F = (f_1, f_2, f_3) : U \to \mathbb{R}^3 \ .$$

Man hat lineare Abbildungen

$$C^\infty(U) \xrightarrow{\text{grad}=\nabla} \mathfrak{V}(U) \xrightarrow{\text{rot}} \mathfrak{V}(U) \xrightarrow{\text{div}} C^\infty(U) :$$

$$\begin{aligned}
\text{grad}(f) &:= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right), \\
\text{rot}(F) &:= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right), \\
\text{div}(F) &:= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}.
\end{aligned}$$

Es gilt: rot grad $f = 0$, div rot $F = 0$.
Ist U zum Beispiel konvex, so gilt: Ist rot $F = 0$, so gibt es ein f mit grad $f = F$; ist div $F = 0$, so gibt es ein G mit rot $G = F$.

Bem. Ist U offen in $\mathbb{R}^3$, so ist U eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ und $\{\text{id}_U\}$ ist ein Atlas von U. Ferner ist U orientierbar; wir wählen auf U die Orientierung, die durch diesen Atlas gegeben ist. Ist M eine abgeschlossene 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand von U, so ist ∂M nach § 15 eine orientierte Fläche in $\mathbb{R}^3$. Zu der Orientierung von ∂M gehört nach § 15 Satz 1 ein Einheitsnormalenfeld ν auf ∂M.
Ist $A : \partial M \to \mathbb{R}^3$ eine Abbildung, so erhält man eine Abbildung

$$\begin{array}{rccl} < A \mid \nu >: & \partial M & \to & \mathbb{R}^3 \\ & x & \mapsto & < A(x) \mid \nu(x) > \ . \end{array}$$

Bezeichnungen: Ist M eine Kurve in $\mathbb{R}^3$, so schreiben wir $ds := d\lambda_M$.
Ist M eine Fläche in $\mathbb{R}^3$, so schreiben wir $dF := d\lambda_M$.
Ist M eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^3$, so schreiben wir $dV := d\lambda_M = d\lambda^3$.

Satz 1: (Klassischer Integralsatz von Gauß) Sei U offen in $\mathbb{R}^3$ und M eine kompakte 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand von U. Ist A ein glattes Vektorfeld auf U, so ist

$$\int_M \text{div} A \, dV = \int_{\partial M} < A \mid \nu > \, dF \ ,$$

wobei ν das Einheitsnormalenfeld aus der vorangehenden Bemerkung ist.

Spezialfall: Sei $f : U \to \mathbb{R}$ glatt und $A := \text{grad}\, f$. Dann ist

$$\text{div} A = \Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \ .$$

Man nennt Δ den *Laplace-Operator*. Satz 1 besagt:

$$\int_M \Delta f \, dV = \int_{\partial M} < \text{grad}\, f \mid \nu > \, dF \ .$$

Nach Analysis II ist $< \operatorname{grad} f(x) \mid \nu(x) >$ die Richtungsableitung von f an der Stelle x in Richtung $\nu(x)$.

Def. Ist U offen in $\mathbb{R}^3$, so heißt eine glatte Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ *harmonisch*, wenn $\Delta f = 0$.

Aus dem Spezialfall des Integralsatzes von Gauß folgt:

Satz 2: (Mittelwerteigenschaft der harmonischen Funktionen) Sei U offen in $\mathbb{R}^3$ und $f : U \to \mathbb{R}$ harmonisch. Sei $p \in U$ und $K := \overline{B}_r(p) \subset U$. Dann ist

$$f(p) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial K} f \, dF \ .$$

Folgerung: (Maximumprinzip für harmonische Funktionen) Sei U offen in $\mathbb{R}^3$ und zusammenhängend, sei $f : U \to \mathbb{R}$ harmonisch und f nehme an einer Stelle von U sein Maximum an. Dann ist f konstant.

Bem. Ist K eine orientierte Kurve in $\mathbb{R}^3$, ist $a \in K$ und φ eine zur Orientierung gehörige Karte von K mit $\varphi(b) = a$, so sei

$$\tau(a) := \frac{\varphi'(b)}{\| \varphi'(b) \|} \in T_a(K) \subset \mathbb{R}^3 \ .$$

Dann ist τ ein wohldefiniertes Vektorfeld auf K; es heißt das zur Orientierung von K gehörige Einheitsvektorfeld auf K.

Satz 3: (Klassischer Integralsatz von Stokes) Sei U offen in $\mathbb{R}^3$ und A ein glattes Vektorfeld auf U. Sei M eine orientierte kompakte Fläche mit Rand in U, sei ν das zur Orientierung gehörige Einheitsnormalenfeld auf M und τ das zur Orientierung gehörige Einheitsvektorfeld auf ∂M. Dann gilt:

$$\int_M < \operatorname{rot} A \mid \nu > \, dF = \int_{\partial M} < A \mid \tau > \, ds \ .$$