Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PROF. DR. W. SINGHOF

WS 2006/07
17. Oktober 2006
Blatt 1

Übungen zu Analysis III

1. (a) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein Polynom von 2 Veränderlichen. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

   (b) Wiederholen Sie den Paragraphen über uneigentliche Integrale aus Analysis I.

   (c) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

   Ein wesentliches Ziel der Analysis III ist es, Bedingungen kennenzulernen, unter denen man die Integrationsreihenfolge vertauschen darf.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die kleinste Zahl ν, so dass gilt: Sind $Q, P \in \mathcal{Q}^n$, so gibt es disjunkte Quader $Q_1, \ldots, Q_\nu \in \mathcal{Q}^n$ mit $Q \setminus P = Q_1 \cup \ldots \cup Q_\nu$.

3. Sind A, B Teilmengen einer Menge X, so heißt

$$A \mathbin{\triangle} B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

   die symmetrische Differenz von A und B. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $\mathcal{R}$ von $\mathcal{P}(X)$ genau dann ein Ring von Teilmengen von X ist, wenn $\mathcal{R}$ bezüglich der Operationen $\triangle$ als Addition und $\cap$ als Multiplikation ein kommutativer Ring im Sinne der Algebra ist.

Abgabe: Dienstag, den 24. Oktober 2006, 11.15 Uhr