Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2006/07
09. Januar 2007
Blatt 11

Übungen zu Analysis III

41. Sei $a > 0$ und $f(x) := e^{-a|x|}$ für $x \in \mathbb{R}$.
    Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ von f.

42. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Sei $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gegeben durch $h(x) := f(x-a)$.
    Zeigen Sie, dass
    $$\hat{h}(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-i<a|\xi>} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

43. Für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ sei
    $$f(x) := \frac{1-\cos x}{x^2}.$$
    Zeigen Sie, dass man f zu einer stetigen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ ergänzen kann und dass $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Führen Sie die in der Vorlesung angegebene Berechnung von $\hat{f}$ im Detail aus.

44. Sei $f(x) := e^{-x^2/2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\hat{f}\,'(\xi) = -\xi \hat{f}(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$.
    Folgern Sie, dass $\hat{f} = f$.

45. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass $\hat{f}$ eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$ ist.

46. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int f(x)\, dx \neq 0$. Wir definieren $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ durch $F(x,y) := f(x)$. Zeigen Sie, dass F nicht integrierbar ist.

Abgabe: Dienstag, den 16. Januar 2007, 11.15 Uhr