Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2006/07
16. Januar 2007
Blatt 12

Übungen zu Analysis III

47. Seien H_1 und H_2 zwei Hilberträume und $\varphi\colon H_1 \to H_2$ eine Isometrie. Zeigen Sie, dass
$$<\varphi(x) \mid \varphi(y)> = <x \mid y> \quad \forall x, y \in H_1.$$

48. Zeigen Sie, dass es lineare Abbildungen $l^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ gibt, die nicht stetig sind.

49. Zeigen Sie mittels der Fourier-Transformierten von $\chi_{[-1,1]}$ und des Satzes von Plancherel, dass
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \mathrm{d}x = \pi.$$

50. (a) Wir definieren die Funktionen $\mathrm{abs}, \mathrm{sign}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\mathrm{abs}(x) := |x|$,
$$\mathrm{sign}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass für die zugehörigen Distributionen auf $\mathbb{R}$ gilt: $\mathrm{D}\,T_{\mathrm{abs}} = T_{\mathrm{sign}}$.
    (b) Was ist $\mathrm{D}^2\,T_{\mathrm{abs}}$?

51. Für ein festes $c \in \mathbb{R}$ definieren wir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch $f(x) := e^{icx}$. Zeigen Sie, dass T_f eine temperierte Distribution ist und berechnen Sie die Fourier-Transformierte von T_f.

Abgabe: Dienstag, den 23. Januar 2007, 11.15 Uhr