Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2006/07
23. Januar 2007
Blatt 13

# Übungen zu Analysis III

52. In § 14 haben wir den Funktionenraum $L^2[-1,1]$ bzw. Funktionen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ mit der Periode 2 untersucht. Leiten Sie aus Satz 1 und Satz 2 die entsprechenden Resultate für $L^2[-a,a]$ bzw. für Funktionen der Periode $2a$ her, wobei $a$ eine beliebige positive Zahl ist.

53. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit der Periode $2\pi$, die auf $[-\pi,\pi[$ gegeben ist durch $f(x) := |x|$. Berechnen Sie die Fourier-Reihe von $f$ und zeigen Sie:
$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

54. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit der Periode $2\pi$, die auf $[-\pi,\pi[$ gegeben ist durch $f(x) := x^2$. Berechnen Sie die Fourier-Reihe von $f$ und zeigen Sie:
$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - \ldots = \frac{\pi^2}{12}.$$
Folgern Sie daraus und aus Aufgabe 49, dass
$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

55. (a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit der Periode $2\pi$, die auf $[-\pi,\pi[$ gegeben ist durch $f(x) = \cosh cx$, wobei $c \neq 0$ eine feste reelle Zahl ist. Berechnen Sie die Fourier-Reihe von $f$ und zeigen Sie
$$\pi \coth c\pi = \frac{1}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c}{c^2 + n^2}.$$
(b) Folgern Sie aus (a), dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t^2}{t^2 + (2n\pi)^2}.$$
(c) Folgern Sie aus (b), dass für alle $t \in \mathbb{R}$, die hinreichend nahe bei 0 liegen, gilt:
$$\frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2} - 1 = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^{2k}} \right) t^{2k}.$$
(d) Folgern Sie aus (c), dass
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

**Abgabe:** Dienstag, den 30. Januar 2007, 11.15 Uhr