Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2006/07
24. Oktober 06
Blatt 2

Übungen zu Analysis III

4. Sei X eine Menge und $\mathcal{R}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von X.
   (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen von X ist.
   (b) Für welche Mengen X ist $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra in X?
   (c) Definiert man $\mu: \mathcal{R} \to [0, \infty]$ durch
   $$\mu(A) := \text{Anzahl der Elemente von } A,$$
   so ist μ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$.

5. Sei X eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen von X und $x \in X$. Sei $\varepsilon_x: X \to [0, \infty]$ gegeben durch
   $$\varepsilon_x(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$
   Zeigen Sie, dass ε_x ein Prämaß auf $\mathcal{R}$ ist. Es heißt das **Dirac-Prämaß** auf $\mathcal{R}$.

6. (a) Sei X eine Menge und $\mathcal{A}$ die Menge aller Teilmengen A von X, für die gilt: A ist endlich, oder $X \setminus A$ ist endlich. Dann ist $\mathcal{A}$ ein Ring von Teilmengen von X. Ist X eine unendliche Menge, so ist $\mathcal{A}$ keine σ-Algebra.
   (b) Sei X eine Menge und $\mathcal{A}$ die Menge aller Teilmengen A von X, für die gilt: A ist höchstens abzählbar oder $X \setminus A$ ist höchstens abzählbar. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in X ist.

7. Sei X eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen von X und μ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$. Seien $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$.
   (a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
   (b) Ist $A \subseteq B$, so ist $\mu(A) \leq \mu(B)$.
   (c) Ist $A \subseteq B$ und $\mu(A) < \infty$, so ist $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
   (d) Ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$, so ist $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.
   (e) Ist $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, so ist $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.
   (f) Ist $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$, so ist $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Abgabe: Dienstag, den 31. Oktober 06, 11.15 Uhr