Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2006/07
31. Oktober 06
Blatt 3

Übungen zu Analysis III

8. Ist A eine Borel-Menge in $\mathbb{R}^n$, so sei $\mathcal{V}(A)$ die Menger aller Folgen (Q_m) in $\mathcal{Q}^n$ mit $A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m$.
   Zeigen Sie: Für jedes A ist $\mathcal{V}(A) \neq \emptyset$ und
   $$\lambda^n(A) = \inf \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^n(Q_m) \,|\, (Q_m) \in \mathcal{V}(A) \right\}.$$

9. Seien X, Y Mengen, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in X. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_f := \{B \in \mathcal{P}(Y) \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra in Y ist.

10. Sei A eine relle $n \times n$-Matrix und B eine Borel-Menge in $\mathbb{R}^n$. Gilt die Gleichung $\lambda^n(A(B)) = |\det A| \cdot \lambda^n(B)$ auch dann, wenn die Matrix A nicht regulär ist?

11. Gegeben seien die folgenden 4 Vektoren in $\mathbb{R}^4$:
    $$v_1 = (1,2,0,0),\ v_2 = (1,2,3,0),\ v_3 = (1,2,3,4),\ v_4 = (5,-1,0,0).$$
    Sei $P := \left\{ \sum_{i=1}^{4} t_i v_i \,\middle|\, 0 \le t_i \le 1 \text{ für } i = 1,\dots,4 \right\} \subset \mathbb{R}^4$.
    Berechnen Sie das Volumen $\lambda^4(P)$.

12. (a) Gegeben sei ein (offenes oder abgeschlossenes) Parallelogramm P in $\mathbb{R}^2$ mit der Grundseite a und der Höhe h. Zeigen Sie, dass $\lambda^2(P) = ah$.
    (b) Gegeben sei ein Dreieck Δ in $\mathbb{R}^2$ mit der Grundseite c und der Höhe h. Zeigen Sie, dass $\lambda^2(\Delta) = \frac{1}{2}ch$.
    (c) Sei
    $$\begin{aligned} Q &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x, y \le 1\}, \\ A &:= \left\{ (x,y) \in Q \,\middle|\, 0 \le y \le \frac{1}{2} \text{ oder } x = 0 \text{ oder } x = \frac{1}{n} \text{ mit einem } n \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$
    Berechnen Sie $\lambda^2(A)$ und $\lambda^2(Q \setminus A)$.
    (d) Sei $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Was ist $\lambda^2(S)$?

Abgabe: Dienstag, den 7. November 06, 11.15 Uhr