Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2006/07
14. November 06
Blatt 5

Übungen zu Analysis III

18. Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass es keine surjektive Abbildung f von X auf die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ gibt.
(Tipp: Betrachten Sie die Menge $\{x \in X \mid x \notin f(x)\}$.)

19. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := x^2$. Zeichnen Sie die ersten 3 Funktionen der im Beweis von Satz 1 von §5 konstruierten wachsenden Folge (f_n) nicht-negativer Treppenfunktionen mit $f = \sup\limits_n f_n$.

20. Beantworten Sie für die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils die folgenden Fragen:

    1) Ist f Lebesgue-integrierbar? Wenn ja, was ist $\int f \mathrm{d}\lambda^1$?
    2) Existiert das Riemannsche Integral $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$?
    3) Existiert das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$?

    In den Teilaufgaben (f)-(h) sei dabei $r(x) := \lfloor |x| \rfloor + 1$, wobei $\lfloor t \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq t$ ist.

    (a) $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
    (b) $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
    (c) $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
    (d) $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
    (e) $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
    (f) $f(x) := r(x)^{-1}$
    (g) $f(x) := r(x)^{-2}$
    (h) $f(x) := (-1)^{r(x)} \cdot r(x)^{-1}$.

21. Finden Sie eine Folge (f_n) von Riemann-integrierbaren Funktionen $f_n\colon [0,1] \to [0, \infty[$, so dass die Reihe $\sum\limits_n f_n(x)$ für jedes $x \in [0,1]$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, aber $\sum\limits_n f_n$ nicht Riemann-integrierbar ist.

Abgabe: Dienstag, den 21. November 06, 11.15 Uhr