Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2006/07
21. November 06
Blatt 6

Übungen zu Analysis III

22. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und f eine integriebare, numerische Funktion auf X. Zeigen Sie, dass f fast überall endlich ist.

23. Begründen Sie detailliert, warum die Funktion $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ nicht über ganz $\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist.

24. (a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) := \int_0^\infty e^{-tx} \cdot \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x.$$

(b) Zeigen Sie, dass $f(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t$.

(c) Folgern Sie, dass das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ den Wert $\frac{\pi}{2}$ hat.

25. Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, \lambda^1)$. Finden Sie zwei Folgen von nicht-negativen Treppenfunktionen, die punktweise gegen dieselbe Grenzfunktion konvergieren, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\lambda^1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \int g_n \mathrm{d}\lambda^1$ existieren und verschieden sind.
(Vgl. §5, Lemma 2).

Abgabe: Dienstag, den 28. November 06, 11.15 Uhr