Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2006/07
28. November 06
Blatt 7

Übungen zu Analysis III

26. Sei f eine messbare nicht-negative numerische Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Wie in der Vorlesung sei
$$M^f := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 0 \le t < f(x)\}.$$
Ferner sei
$$\bar{M}^f := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 0 \le t \le f(x)\}.$$
    (a) Zeigen Sie detailliert, dass M^f und $\bar{M}^f$ Borel-Mengen sind.
    (b) Zeigen Sie, dass $\lambda^{n+1}(\bar{M}^f) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f \mathrm{d}\lambda^n$.
    (c) Zeigen Sie, dass $\lambda^{n+1}(\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\}) = 0$.
    (d) Ist $\bar{M}^f$ der Abschluss der Teilmenge M^f von $\mathbb{R}^{n+1}$?

27. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := x^2 + y^2$. Berechnen Sie $\int\limits_B f \mathrm{d}\lambda^2$ für die folgenden Teilmengen B von $\mathbb{R}^2$:
    (a) $B = \{(x,y) \mid x \ge 0,\ y \ge 0 \text{ und } x + y \le 1\}$.
    (b) $B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.
    (c) $B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

28. (a) Führen Sie die in der Vorlesung skizzierte Berechnung des Volumens $\lambda^n(B_{n,r})$ der Kugel
$$B_{n,r} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n x_i^2 \le r^2 \right\}$$
detailliert aus und zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n(B_{n,1}) = 0$.
    (b) Seien $a_1, \dots, a_n > 0$ und sei $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die lineare Abbildung mit $S(e_i) = a_i e_i$ für $i = 1, \dots, n$, wobei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ ist. Das Bild E von $B_{n,1}$ unter S ist ein Ellipsoid mit den Halbachsen $a_1, \dots, a_n$. Was ist $\lambda^n(E)$?

29. Ist A eine Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$ und $h > 0$, so sei
$$C_h(A) := \{((1-t)x, th) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x \in A,\ 0 \le t \le 1\}.$$
$C_h(A)$ heißt der Kegel mit Basis A und der Höhe h. Zeigen Sie:
Ist $A \in \mathcal{B}^{n-1}$, so ist $C_h(A) \in \mathcal{B}^n$ und
$$\lambda^n(C_h(A)) = \frac{h}{n} \lambda^{n-1}(A).$$

Abgabe: Dienstag, den 5. Dezember 06, 11.15 Uhr