Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2006/07
5. Dezember 06
Blatt 8

Übungen zu Analysis III

30. Bestimmen Sie mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips das Volumen eines sphärischen Rings, der als Restkörper übrig bleibt, wenn man in eine Kugel ein zylindrisches Loch bohrt, so dass die Zylinderachse ein Durchmesser der Kugel ist. Alle sphärischen Ringe gleicher Höhe haben gleiches Volumen (unabhängig von den Radien der Kugel und des Zylinders).

31. Für $t > 0$ sei

$$F(t) := \int_0^\infty e^{-tx^2} \cos x^2 \mathrm{d}x,$$
$$G(t) := \int_0^\infty e^{-tx^2} \sin x^2 \mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie mit der Methode aus §8, dass

$$F(t)^2 - G(t)^2 = \frac{\pi}{4}\frac{t}{1+t^2}, \quad 2F(t)G(t) = F(t)G(t) + G(t)F(t) = \frac{\pi}{4}\frac{1}{1+t^2}.$$

Bestimmen Sie daraus $F(t)$ und $G(t)$ und folgern Sie

$$\int_0^\infty \cos x^2 \mathrm{d}x = \int_0^\infty \sin x^2 \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

(Diese uneigentlichen Integrale heißen **Fresnelsche Integrale**.)

32. (a) (**Zylinderkoordinaten**) Sei $\varphi\colon [0,\infty[\times [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\varphi(r,t,z) := (r\cos t, r\sin t, z).$$

Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ genau dann integrierbar ist, wenn die Abbildung

$$(r,t,z) \mapsto f(\varphi(r,t,z)) \cdot r$$

auf $[0,\infty[\times [0,2\pi] \times \mathbb{R}$ integrierbar ist, und dass dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(\varphi(r,t,z)) \cdot r \;\mathrm{d}r\mathrm{d}t\mathrm{d}z.$$

Bitte wenden!

(b) (**Kugelkoordinaten**) Sei $\Phi\colon [0,\infty[\, \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(r,\vartheta,\varphi) := (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta).$$

Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ genau dann integrierbar ist, wenn die Abbildung

$$(r,\vartheta,\varphi) \mapsto f(\Phi(r,\vartheta,\varphi)) \cdot r^2 \sin\vartheta$$

auf $[0,\infty[\, \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$ integrierbar ist, und dass dann gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} f(\Phi(r,\vartheta,\varphi)) \cdot r^2 \sin\vartheta \; \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}r.$$

Abgabe: Dienstag, den 12. Dezember 06, 11.15 Uhr