Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2006/07
12. Dezember 06
Blatt 9

Übungen zu Analysis III

33. In der Transformationsformel betrachtet man offene Teilmengen U und V von $\mathbb{R}^n$ und einen C^1-Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$. Im letzten Schritt des Beweises hat man einen beliebigen Punkt $x \in U$, und dann heißt es:
"Wir können annehmen, dass $x = 0 = \varphi(x)$; indem wir φ durch $D\varphi(0)^{-1} \circ \varphi$ ersetzen, können wir ferner annehmen, dass $D\varphi(0)$ die Einheitsmatrix ist".
Zeigen Sie detailliert, warum man diese Annahmen machen kann.

34. Sei A eine beschränkte Borel-Menge in $\mathbb{R}^n$ mit $\lambda^n(A) > 0$.

    (a) Zeigen Sie: Die Funktionen $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j \chi_A(x)$ von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ sind integrierbar für $j = 1, \ldots, n$. Wir schreiben:
    $$\int_A x \mathrm{d}x := \left(\int_A x_1 \mathrm{d}x, \ldots, \int_A x_n \mathrm{d}x \right) \in \mathbb{R}^n$$
    und nennen $\dfrac{1}{\lambda^n(A)} \displaystyle\int_A x \mathrm{d}x$ den **Schwerpunkt** von A.

    (b) Ist S der Schwerpunkt von A und ist $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\varphi(x) := a + T(x)$, wobei $a \in \mathbb{R}^n$ und $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, so hat $\varphi(A)$ den Schwerpunkt $\varphi(S)$.

    (c) Bestimmen Sie die Schwerpunkte einer Kugel, einer Halbkugel und eines Volltorus in $\mathbb{R}^3$.

35. Sei A eine beschränkte Borel-Menge in $\mathbb{R}^2$ mit $\lambda^2(A) > 0$ und mit der Eigenschaft
    $$r > 0 \quad \text{für alle } (r, z) \in A.$$
    Sei R die erste Koordinate des Schwerpunkts von A, und sei V der Rotationskörper
    $$V := \{(r \cos t, r \sin t, z) \mid (r, z) \in A, 0 \le t \le 2\pi\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$
    Zeigen Sie, dass $V \in \mathcal{B}^3$ und dass
    $$\lambda^3(V) = 2\pi R \cdot \lambda^2(A)$$
    (**Erste Guldinsche Regel**). Welchen Rauminhalt hat also der Volltorus?

36. Zeigen Sie, dass von den beiden Räumen $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ keiner in dem jeweils anderen enthalten ist.

Abgabe: Dienstag, den 19. Dezember 06, 11.15 Uhr