Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2007
10. April 07
Blatt 1

Übungen zu Analysis IV

1. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:
$$\frac{2}{1-3i},\ \left(1+i\sqrt{3}\right)^6,\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5.$$

2. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.
   (a) Wenn f nicht konstant ist, so ist die Funktion $z \mapsto \overline{f(z)}$ nicht holomorph.
   (b) Wenn f nur reelle Werte annimmt, so ist f konstant.

3. Beweisen Sie die Kettenregel für holomorphe Funktionen auf zwei Weisen:
   (a) Modifizieren Sie den Beweis aus Analysis I.
   (b) Benutzen Sie die Kettenregel aus der Analysis von Funktionen mehrerer Veränderlicher.

4. Wir identifizieren $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ in der üblichen Weise. Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion.
   (a) Definiert man $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch
   $$h(x,y) := \int_0^y \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\partial g}{\partial y}(s,0)\,\mathrm{d}s,$$
   so erfüllt $f := g + ih$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und ist daher holomorph.
   (b) Sind $h_1, h_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zwei harmonische Funktionen, so dass $g + ih_1$ und $g + ih_2$ holomorph sind, so unterscheiden sich h_1 und h_2 um eine Konstante.
   (c) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist das Polynom $x^2 + 2axy + by^2$ Realteil einer holomorphen Funktion? Bestimmen Sie für jedes solches Paar (a, b) alle diese holomorphen Funktionen.

Abgabe: Freitag, den 13. April 2007, 11.15 Uhr