Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PROF. DR. W. SINGHOF

SS 2007
22. Juni 07
Blatt 11

Übungen zu Analysis IV

39. Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt:

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + z^{2^n}\right) = \frac{1}{1-z}.$$

40. (a) Sei U eine offene Umgebung von 0 in $\mathbb{C}$; sei f holomorph auf $U \setminus \{0\}$, und 0 sei ein Pol von f.
Zeigen Sie: Für jedes $r > 0$ mit $B_r(0) \subseteq U$ gibt es ein $R \geq 0$ mit $K_{R,\infty}(0) \subseteq f(K_{0,r}(0))$.
(b) Sei c eine nicht-hebbare isolierte Singularität einer Funktion f. Sei g definiert durch $g(z) \colon = \exp(f(z))$.
Zeigen Sie, dass c eine wesentliche Singularität von g ist.

41. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $0 < m < n$. Ferner sei n gerade und m ungerade. Wir betrachten die meromorphe Funktion $f(z) = \dfrac{z^{m-1}}{1+z^n}$. Sei $a := e^{\frac{i\pi}{n}}$.
(a) Die Pole von f in der oberen Halbebene sind die Zahlen
$$a^{2k+1} \text{ mit } k = 0, 1, \ldots, \tfrac{n}{2} - 1.$$
(b) $\operatorname{Res}_{a^{2k+1}}(f) = -\frac{1}{n}\, a^{(2k+1)m}$.
(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{m}{n}\pi}.$

42. Sei H ein Hilbert-Raum unendlicher Dimension und $D := \{x \in H \,|\, ||x|| \leq 1\}$.
Zeigen Sie, dass H nicht kompakt ist.
(Hinweis: Betrachten Sie ein unendliches Orthonormalsystem. Dies ist noch einmal eine Aufgabe zu §3.)

Abgabe: Freitag, den 29. Juni 2007, 11.15 Uhr