Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PROF. DR. W. SINGHOF

SS 2007
29. Juni 07
Blatt 12

Übungen zu Analysis IV

42. (a) Folgern Sie aus der Partialbruchzerlegung des Kotangens, dass für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt:

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2},$$

wobei diese Reihe auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ normal konvergiert.

(b) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi$ ist

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(z+n\pi)}{(z+n\pi)^2} = 1.$$

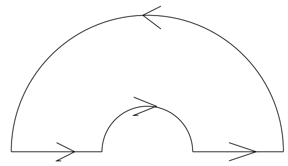
(c) Folgern Sie aus (b) durch Integration über $[0, \pi]$, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \, \mathrm{d}x = \pi.$$

43. Berechnen Sie das Integral aus Aufg. 42. (c) auch auf folgende Weise: Benutzen Sie

$$2 \sin^2 x = \operatorname{Re}(1 - e^{2ix})$$

und betrachten Sie ein geeignetes Integral längs des Weges:



44. Zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} \mathrm{d}x = \frac{3}{4}\pi.$

45. (a) Zeigen Sie unter Benutzung der Formel

$$\frac{1}{\sin(z)} = \cot(z) + \tan\left(\frac{1}{2}z\right),$$

dass für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt:

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Bitte wenden!

(b) Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ist

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z+n}.$$

Wie ist diese Summe zu interpretieren?

Abgabe: Freitag, den 06. Juli 2007, 11.15 Uhr