Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2007
17. April 07
Blatt 2

Übungen zu Analysis IV

5. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $f(z) = z^2$ winkeltreu ist.
   Zeichnen Sie die Bilder der 4 Geraden
   $$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = n\},\ n = 1, 2,$$
   $$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = n\},\ n = 1, 2$$
   unter der Abbildung f.

6. Sei $U\colon= \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ und
   $$S\colon= \{ri \mid r \in \mathbb{R} \text{ und } -2 \leq r \leq 2\}.$$
   Die Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch $f(z)\colon= z - \frac{1}{z}$.
   (a) f ist winkeltreu.
   (b) f bildet Kreise mit Mittelpunkt 0 auf Ellipsen mit den Brennpunkten $2i$ und $-2i$ ab.
   (c) Worauf werden die von 0 ausgehenden Strahlen abgebildet?
   (d) Es ist $f(U) = \mathbb{C} \setminus S$, f ist injektiv, und die inverse Abbildung von $\mathbb{C} \setminus S$ auf U ist ebenfalls holomorph.

7. Sei $\mathbb{H}\colon= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene und $\mathbb{D}\colon= \{z \in \mathbb{C} \mid\ |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe.
   Zeigen Sie: Durch
   $$f(z)\colon= \frac{z - i}{z + i}$$
   erhält man eine holomorphe Bijektion von $\mathbb{H}$ auf $\mathbb{D}$.
   Zeigen Sie, dass auch die Umkehrabbildung holomorph ist.

8. Führen Sie den Beweis von Satz 2 von §3 der Vorlesung aus, d.h. zeigen Sie:
   Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Für eine Teilmenge U von A sind äquivalent:
   (1) U ist abgeschlossen in A.
   (2) Es gibt eine abgeschlossene Teilmenge V von X mit $U = V \cap A$.

Abgabe: Dienstag, den 24. April 2007, 11.15 Uhr