Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2007
24. April 07
Blatt 3

Übungen zu Analysis IV

9. Ermitteln Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:
$\sum_n i^n z^n, \quad \sum_n \frac{n^2}{2^n} z^n, \quad \sum_n (-1)^n z^{2n}, \quad \sum_n 2^n z^{n!}.$

10. Betrachten Sie die folgenden Tripel (X, A, U), wobei X ein metrischer Raum und $U \subseteq A \subseteq X$ ist. Entscheiden Sie jeweils, ob U offen in A und ob U abgeschlossen in A ist.

    (a) $X = \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$, $U =]0, 1]$.
    (b) $X = \mathbb{R}$, $A =]0, 1[$, $U = [\frac{1}{2}, 1[$.
    (c) $X = \mathbb{C}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $U = A \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.
    (d) $X = \mathbb{C}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $U = A \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 1\}$.
    (e) $X = \mathbb{C}$, $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $U = \{\frac{1}{2}\}$.
    (f) $X = \mathbb{C}$, $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, $U = \{0\}$.

11. Sei X ein kompakter metrischer Raum, sei I eine Menge, und für jedes $i \in I$ sei eine offene Teilmenge A_i von X gegeben mit $X = \cup_i A_i$. Zeigen Sie, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass es für jedes $x \in X$ ein $i \in I$ gibt mit $B_\varepsilon(x) \subseteq A_i$.
(Man nennt dann ε eine **Lebesgue-Zahl** der Überdeckung $(A_i)_{i \in I}$ von X.)

12. Sei (X, d) ein metrischer Raum.
Wir definieren $\delta\colon X \times X \to \mathbb{R}$ durch $\delta(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.
Zeigen Sie:

    (a) δ ist eine Metrik auf X.
    (b) Bezüglich der Metrik δ ist X beschränkt.
    (c) d besitzt dieselben offenen Mengen wie δ.

Abgabe: Mittwoch, den 2. Mai 2007, 11.15 Uhr