Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2007
4. Mai 07
Blatt 4

Übungen zu Analysis IV

13. Berechnen Sie $\int_0^{1+i} \mathrm{Re}(z)\ dz$ und $\int_{\partial B} \mathrm{Re}(z)\ dz$, wobei B die Kreisscheibe um 0 mit Radius r ist.

14. Sei $A := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Es gibt ein } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ mit } z^{2^n} = 1\}$.
Zeigen Sie, daß A dicht in $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ist, d.h. daß für den Abschluß $\overline{A}$ von A in $\mathbb{C}$ gilt: $\overline{A} = S^1$.

15. Wir betrachten die Potenzreihe
$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$
   a) g hat den Konvergenzradius 1.
   b) $\lim\limits_{t\to 1,\ t\in]0,1[} g(t) = \infty$
   c) Für $|z| < 1$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $|g(z^{2^n})| \le |g(z)| + n$.
   d) Ist $n \in \mathbb{N}$ und $z^{2^n} = 1$, so ist $\lim\limits_{t\to 1,\ t\in]0,1[} |g(tz)| = \infty$

16. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R.
Es gelte $0 < R < \infty$. Ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| = R$ heißt ein **singulärer Punkt** von f, wenn es keine offene Umgebung U von z in $\mathbb{C}$ gibt, so daß eine holomorphe Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}$ existiert mit $g|U \cap B_R(a) = f|U \cap B_R(a)$.
   a) Die Menge der singulären Punkte ist abgeschlossen in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = R\}$.
   b) Bestimmen Sie die singulären Punkte der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.
   c) Sei g die Potenzreihe aus Aufgabe 15. Zeigen Sie, daß jeder Punkt von S^1 ein singulärer Punkt von g ist.

Abgabe: Freitag, den 11. Mai 2007, 11.15 Uhr