Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2007
11. Mai 07
Blatt 5

Übungen zu Analysis IV

Dieses Übungsblatt setzt nur den Inhalt der Vorlesung bis einschließlich §4 voraus.

17. Gegeben seien zwei Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ mit positiven Konvergenzradien R bzw. R'.

    (a) Zeigen Sie, dass für den Konvergenzradius R'' der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n d_n z^n$ gilt:

    $$R'' \geq RR'.$$

    (b) Geben Sie ein Beispiel, in dem $R'' > RR'$.

18. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius 1. Ferner sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n =: s$ konvergent.

    Zeigen Sie, dass

    $$f(1-) := \lim_{\substack{t \to 1 \\ 0 \leq t < 1}} f(t) = s.$$

    (Dies ist der **Abelsche Grenzwertsatz,** der in Analysis I für reelle Potenzreihen bewiesen wurde. Die jetzige Aufgabe verlangt nur, dass Sie den Beweis aus Analysis I abschreiben und an den richtigen Stellen statt reeller Zahlen komplexe Zahlen zulassen.)

Bitte wenden!

19. (a) Die Reihe $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ habe den Konvergenzradius 1. Ferner existiere $f(1-)$, und es sei $\lim\limits_{n\to\infty} n\ a_n = 0$.

Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert und den Wert $f(1-)$ hat. **(Satz von Tauber)**.

(Anleitung: Gehen sie in 3 Schritten vor:

Schritt 1: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot |a_k| = 0$.

Schritt 2: Für $0 \le x < 1$ ist $1 - x^k \le k \cdot (1 - x)$.

Schritt 3: Für $0 \le x < 1$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{k=0}^{n} a_k - f(1-) = (f(x) - f(1-)) + \sum_{k=0}^{n} a_k (1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\ x^k.$$

Wenden Sie darauf die Dreiecksungleichung an und setzen Sie schließlich $x = 1 - \frac{1}{n}$.)

(b) Zeigen Sie anhand von $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n\ z^n$, dass in a) die Voraussetzung $\lim\limits_{n\to\infty} n\ a_n = 0$ nicht entbehrlich ist.

Abgabe: Freitag, den 18. Mai 2007, 11.15 Uhr