Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2007
18. Mai 07
Blatt 6

Übungen zu Analysis IV

20. Seien $a, b > 0$ und $E := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{a^2} + \frac{(\operatorname{Im} z)^2}{b^2} \leq 1 \right\}$.

   (a) Geben Sie eine sinnvolle Definition für $\int\limits_{\partial E} f(z)\,\mathrm{d}z$ an, wobei f eine stetige, komplexwertige Funktion auf ∂E ist.

   (b) Ist f holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, so zeigen Sie, dass
   $$\int\limits_{\partial B_a(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\partial E} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\partial B_b(0)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

   (c) Folgern Sie durch Anwendung auf $f(z) = \frac{1}{z}$, dass
   $$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

21. Entwickeln Sie die folgenden Funktionen f in eine Potenzreihe um c und bestimmen Sie den Konvergenzradius:

   (a) $f(z) = \exp z,\ c = \pi i$.

   (b) $f(z) = \frac{2z+1}{(z^2+1)(z+1)^2},\ c = 0$.

   (c) $f(z) = \frac{1}{(z-i)^3},\ c = -i$.

22. Sei f eine ganze Funktion mit $f(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

23. Sei f eine ganze Funktion. Es gebe ein $n \in \mathbb{N}$ und $R, M \in \mathbb{R}$ mit
   $$|f(z)| \leq M \cdot |z|^n \quad \text{für} \quad |z| \geq R.$$
   Zeigen Sie, dass f ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist.

Abgabe: Freitag, den 25. Mai 2007, 11.15 Uhr