Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2007
25. Mai 07
Blatt 7

Übungen zu Analysis IV

24. Sei f eine ganze Funktion. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gelte $f(z+1) = f(z)$ und $f(z+i) = f(z)$. Folgern Sie aus dem Satz von Liouville, dass f konstant ist.

25. Sei $\mathbb{D} \colon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und sei f eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| \leq 1 \ \forall z \in \mathbb{D}$. Dann ist $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z| \ \forall z \in \mathbb{D}$. Wenn es ein $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ mit $|f(z)| = |z|$ gibt oder wenn $|f'(0)| = 1$ ist, so ist f eine Drehung von $\mathbb{D}$ um 0.

    (Hinweis: Wenden Sie das Maximumsprinzip auf die Funktion $\frac{f(z)}{z}$ an!)

26. Sei $a \in \mathbb{D}$. Wir betrachten die gebrochen-rationale Funktion φ_a mit
$$\varphi_a(z) \colon = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$
    (a) Zeigen Sie, dass φ_a die Menge $\mathbb{D}$ auf sich abbildet; die Umkehrabbildung ist φ_{-a}.

    (b) $\varphi_a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$.

    (c) $\varphi_a(a) = 0$, $\varphi_a'(0) = 1 - |a|^2$, $\varphi_a'(a) = (1 - |a|^2)^{-1}$.

    (d) Sei f eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{D}$ mit $|f(z)| < 1 \ \forall z \in \mathbb{D}$. Sei $b \colon = f(a)$ und
$$g \colon = \varphi_b \circ f \circ \varphi_{-a}.$$
    Zeigen Sie, dass
$$g'(0) = \frac{1 - |a|^2}{1 - |b|^2} f'(a).$$
    (e) Wenden Sie Aufgabe 26 auf die Funktion g an und folgern Sie:
$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |b|^2}{1 - |a|^2};$$
    wenn Gleichheit gilt, so gibt es ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$, so dass
$$f(z) = \varphi_{-b}(c\varphi_a(z)) \ \forall z \in \mathbb{D}.$$
    (f) Sei f eine holomorphe bijektive Abbildung von $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{D}$, deren Umkehrfunktion auch holomorph ist. Sei $f(a) = 0$.
    Zeigen Sie: Es gibt ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$, so dass $f = c\varphi_a$.
    (Wenden Sie (e) auf f und auf die Umkehrfunktion von f an.)

Abgabe: Freitag, den 1. Juni 2007, 11.15 Uhr