Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2007
1. Juni 07
Blatt 8

Übungen zu Analysis IV

27. Bestimmen Sie die Laurent-Reihe von
$$f(z) := \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$
im Kreisring $K_{r,R}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$ für
   (a) $r = 0,\ R = 1$,
   (b) $r = 1,\ R = 2$,
   (c) $r = 2,\ R = \infty$.

28. Die folgenden Funktionen f haben 0 als isolierte Singularität. Entscheiden Sie, ob es sich dabei um eine hebbare Singularität, einen Pol oder eine wesentliche Singularität handelt. Wenn eine hebbare Singularität vorliegt, so geben Sie an, wie man $f(0)$ definieren muss, damit f in 0 holomorph wird; wenn ein Pol vorliegt, so bestimmen Sie den Hauptteil; wenn eine wesentliche Singularität vorliegt, so bestimmen Sie $f(K_{0,\varepsilon}(0))$ für kleine Zahlen $\varepsilon > 0$.
   (a) $f(z) = \dfrac{1}{1-e^z}$,
   (b) $f(z) = \exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$,
   (c) $f(z) = \cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$,
   (d) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

29. Sei f die holomorphe Funktion auf $K_{0,\pi}(0)$, die gegeben ist durch
$$f(z) = \frac{z-1}{\sin^2 z}.$$
Berechnen Sie den Hauptteil von f.

30. Seien U, V offen in $\mathbb{C}$ und sei $f\colon U \to V$ holomorph und bijektiv. Zeigen Sie mit dem Satz von der Gebietstreue und dem Riemannschen Hebbarkeitssatz: Die Umkehrabbildung von f ist stetig und holomorph.
(Hinweis: Zeigen Sie, dass für alle $c \in U$ mit $f'(c) \neq 0$ der Grenzwert
$$\lim_{z \to f(c)} \frac{f^{-1}(z) - c}{z - f(c)}$$
existiert. Beweisen Sie dazu, dass in einer Umgebung W von c eine stetige Funktion $g\colon W \to \mathbb{C}$ existiert mit $f(w) = f(c) + (w-c)g(w)\ \forall w \in W$ und $g(c) = f'(c)$.)

Abgabe: Freitag, den 8. Juni 2007, 11.15 Uhr