Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2007
8. Juni 07
Blatt 9

Übungen zu Analysis IV

31. Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in allen ihren Singularitäten:

a) $\dfrac{1-\cos z}{z^3}$; b) $\dfrac{z^2}{(1+z)^3}$; c) $\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$;

d) $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$; e) $\dfrac{z^3}{\sin^2 z}$.

32. Sei U offen in $\mathbb{C}$ und f eine holomorphe, injektive Funktion auf U. Folgern Sie aus Aufgabe 30:

Für jedes $z \in U$ ist $f'(z) \neq 0$.

33. Sei U ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und S eine diskrete, in U abgeschlossene Teilmenge. Sei $f\colon U \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv.

(a) Kein Punkt von S ist eine wesentliche Singularität von f.
(Tipp: Gebietstreue und Casorati-Weierstraß)

(b) Ist $s \in S$ ein Pol von f, so ist $o_c(f) = -1$.
(Tipp: Wenden Sie Aufgabe 32 auf $\frac{1}{f}$ an.)

(c) Sei S_0 die Menge aller $s \in S$, die hebbare Singularitäten von f sind, sei $V\colon = (U \setminus S) \cup S_0$ und sei $g\colon V \to \mathbb{C}$ die holomorphe Fortsetzung von f. Zeigen Sie, dass g injektiv ist.

34. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine injektive holomorphe Abbildung. Zeigen Sie, dass es $a, b \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$f(z) = az + b \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

(Tipp: Wenden Sie Aufgabe 33 (a) auf die Funktion $z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$ an, um zu zeigen, dass f ein Polynom ist.)

Abgabe: Freitag, den 15. Juni 2007, 11.15 Uhr