**Analysis I**
**Sommersemester 2021**
**Übungsblatt 2**

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

| | |
|---|---|
| Ausgabe: | Di., 27.04.2021, 14:00 Uhr |
| Abgabe: | Di., 04.05.2021, 16:20 Uhr |
| Besprechung: | Mi., 05.05.2021 bzw. Do., 06.05.2021 |

Ⓑ **Aufgabe 2.1:** (Verkettungen, $6 + 4$ Punkte)

(a) Berechnen Sie für die Abbildungen $f,\, g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, die gegeben sind als

$$f(n) := \begin{cases} n+1, & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ n-1, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \end{cases} \qquad g(n) := \begin{cases} n-1, & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ n+1, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z},$$

die Verkettungen $f \circ g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ und $g \circ f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$.

(b) Seien $A$, $B$ und $C$ nichtleere Mengen und $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ beide invertierbar. Zeigen Sie, dass $g \circ f : A \longrightarrow C$ invertierbar ist mit $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

*Hinweis: Hier ist $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der ganzen Zahlen. Für Teil (b) beachten Sie Proposition 1.1.37 und Korollar 1.1.40.*

Ⓑ **Aufgabe 2.2:** (Vollständige Induktion, $4 + 4$ Punkte)
Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(1+1) \cdot (1 + \frac{1}{2}) \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{1}{n}) = n + 1$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 + 5n$ durch 6 teilbar.

**Aufgabe 2.3:** (Halbordnungen)
Sei $A$ eine Menge. Zeigen Sie, dass durch $\subseteq$ eine Halbordnung auf $\mathcal{P}(A)$ gegeben ist. Zeigen Sie weiterhin, dass $\subseteq$ keine totale Ordnung auf $\mathcal{P}(A)$ darstellt, falls $A$ mindestens zwei Elemente hat.

**Aufgabe 2.4:** (Abzählbarkeit)
Seien $A$ und $B$ abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass $A \times B$ abzählbar ist.

*Hinweis: Wie im Beweis von Proposition 1.1.47 (b) können Sie o. E. annehmen, dass $A \neq \varnothing$ und $B \neq \varnothing$, da sonst $A \times B = \varnothing$ wäre. Sie können also annehmen, dass surjektive Abbildungen $a : \mathbb{N} \longrightarrow A$ und $b : \mathbb{N} \longrightarrow B$ existieren. Verwenden Sie diese, um zunächst eine surjektive Abbildung $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow A \times B$ zu konstruieren. Beachten Sie, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist, d. h. wie im Beweis von Proposition 1.1.47 (b) existiert eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.*