Analysis I
Sommersemester 2021
Übungsblatt 3

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 04.05.2021, 14:00 Uhr
Abgabe: Di., 11.05.2021, 16:20 Uhr
Besprechung: Mi., 12.05.2021

Ⓑ **Aufgabe 3.1:** (Fakultät, $2+2+4$ Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Gleichungen/Abschätzungen:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $n! \leq n^n$.

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $n! \cdot n! \geq n^n$.

Hinweis: Teil (a) kann durch vollständige Induktion (bzgl. n) gezeigt werden. Teil (b) folgt aus Teil (a). Um Teil (c) zu zeigen, verwenden Sie Teil (a) und eine Umordnung der Faktoren: $n! \cdot n! = [1 \cdot n] \cdot [2 \cdot (n-1)] \cdot \ldots \cdot [n \cdot 1]$. Zeigen Sie, dass $k \cdot (n-k+1) \geq n$ für $k = 1, 2, \ldots, n$ und $n \in \mathbb{N}$.

Ⓑ **Aufgabe 3.2:** (Binominalkoeffizienten, $4+6$ Punkte)

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion:
Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jedes $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ ist $n!$ durch $k!(n-k)!$ teilbar.

(b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ ist der *Binominalkoeffizient* definiert als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Rechenregeln:

(i) $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$ (ii) $\displaystyle\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$

Hinweis: Nutzen Sie für Teil (a) die Darstellung $(n+1)! = (n+1-k)n! + kn!$.

Aufgabe 3.3: (Abzählbarkeit)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \{0, 1\}$. Konstruieren Sie eine bijektive Abbildung $f : \prod_{n=1}^{\infty} A_n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Aufgabe 3.4: (Geordnete, kommutative, unitäre Ringe)
Sei $(R, \oplus, \odot, \sqsubseteq)$ geordneter, kommutativer, unitärer Ring. Zeigen Sie, dass für alle $x, y, z, w \in R$ gilt:

(a) Ist $x \sqsubseteq y$ und $z \sqsubseteq w$, dann ist $x \oplus z \sqsubseteq y \oplus w$.

(b) Genau dann ist $0_R \sqsubseteq x$, wenn $\ominus x \sqsubseteq 0_R$.

(c) Ist $x \sqsubseteq y$, dann ist $\ominus y \sqsubseteq \ominus x$.

(d) $0_R \sqsubseteq x \odot x$.

(e) $0_R \sqsubseteq 1_R$.

Hinweis: Sie können zum Beweis die Eigenschaften 1.3.2 (A_1) – (A_4), (M_1) – (M_3), (D_1), (D_2), (O_1) und (O_2) sowie die Aussagen 1.3.4 (a) – (d), 1.3.5 (a) – (d) und 1.3.6 (a), (e) – (l) verwenden.