Analysis I
Sommersemester 2021
Übungsblatt 4

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Di., 11.05.2021, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 18.05.2021, 16:20 Uhr
Besprechung:	Mi., 19.05.2021 bzw. Do., 20.05.2021

Ⓑ **Aufgabe 4.1:** (Binomische Formel, 6 Punkte)
Sei $(F, \oplus, \odot)$ ein Körper. Zeigen Sie durch vollständige Induktion (nach n):

$$(x \oplus y)^n = \bigoplus_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \odot y^k, \qquad x,\, y \in F,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Ⓑ **Aufgabe 4.2:** (Geometrische Summe, $6 + 2$ Punkte)
Sei $(F, \oplus, \odot)$ ein Körper.

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion (nach n):

$$\bigoplus_{k=0}^{n} x^{n-k} \odot y^k = \frac{y^{n+1} \ominus x^{n+1}}{y \ominus x}, \qquad x,\, y \in F,\ x \neq y,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

(b) Zeigen Sie die geometrische Summenformel:

$$\bigoplus_{k=0}^{n} q^k = \frac{1_F \ominus q^{n+1}}{1_F \ominus q}, \qquad q \in F,\ q \neq 1_F,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 4.3: (Minimum und Maximum)
Seien A eine Menge und $\sqsubseteq$ eine (totale) Ordnung auf A. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $B \subseteq A$ eine Menge mit n Elementen. Zeigen Sie, dass $\min(B) \in A$ und $\max(B) \in A$ existieren.

Hinweis: Argumentieren Sie mit Hilfe einer vollständigen Induktion (nach n).

Ⓑ **Aufgabe 4.4:** (Infimum und Supremum, $3 + 3$ Punkte)
Seien X eine nicht leere Menge und $A := \mathcal{P}(X)$ versehen mit der Halbordnung $\subseteq$. Seien $Y,\, Z \subseteq X$ und $B := \{\, Y,\, Z \,\} \subseteq A$. Zeigen Sie, dass $\inf B = Y \cap Z$ und $\sup B = Y \cup Z$.

Aufgabe 4.5: (Monotone Funktionen)
Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und sei $f : [a,\, b] \longrightarrow [a,\, b]$ monoton wachsend. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt $x^* \in [a,\, b]$ hat, d. h. $f(x^*) = x^*$.

Bemerkungen: Es ist $[a,\, b] := \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b \,\}$. Die Funktion f ist monoton wachsend, falls $f(x) \leq f(y)$ für alle $x,\, y \in [a,\, b]$ mit $x \leq y$.

Hinweis: Betrachten Sie dann die Menge $A := \{\, x \in [a,\, b] \,:\, x \leq f(x) \,\}$ und zeigen Sie, dass A nicht leer und von oben beschränkt ist. Betrachten Sie den Punkt $x^* := \sup A$.