Analysis I
Sommersemester 2021
Übungsblatt 5

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Di., 18.05.2021, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 25.05.2021, 16:20 Uhr
Besprechung:	Mi., 26.05.2021 bzw. Do., 27.05.2021

Ⓑ **Aufgabe 5.1:** (Betrag, $2+2$ Punkte)
Zeigen Sie, dass für den Betrag $|\cdot|:\mathbb{R}\longrightarrow[0,\infty)$ gilt:

$$|x+y|\leq|x|+|y|, \qquad ||x|-|y||\leq|x-y|, \qquad x,\,y\in\mathbb{R}.$$

Ⓑ **Aufgabe 5.2:** (Komplexe Zahlen: Arithmetik, $4+4+4$ Punkte)

(a) Berechnen Sie jeweils $z+w,\ zw\in\mathbb{C}$ für

$$\text{(i)}\quad z=\tfrac{1}{\sqrt{5}}(2+i)\quad\text{und}\quad w=\tfrac{3}{2}+2i \qquad\qquad \text{(ii)}\quad z=\tfrac{1}{\sqrt{10}}(3-i)\quad\text{und}\quad w=-i.$$

(b) Stellen Sie jeweils die Zahl $z\in\mathbb{C}$ in der Form $z=x+iy$ mit $x,\,y\in\mathbb{R}$ dar für

$$\text{(i)}\quad z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 \qquad\qquad \text{(ii)}\quad z=(1+i)^{2n}+(1-i)^{2n}\quad\text{mit}\quad n\in\mathbb{N}.$$

(c) Sei $z=x+iy\in\mathbb{C}\setminus\{\,0\,\}$ mit $x,\,y\in\mathbb{R}$. Stellen Sie die Zahl $w\in\mathbb{C}$ dar als $w=u+iv$ mit $u,\,v\in\mathbb{R}$ für

$$\text{(i)}\quad w=z+(\bar{z})^{-1} \qquad\qquad \text{(ii)}\quad w=(\bar{z})^2+\tfrac{1}{z^2}.$$

Ⓑ **Aufgabe 5.3:** (Komplexe Zahlen: Körpereigenschaften, $4+2+2$ Punkte)
Sei $(\mathsf{C},\,+,\,\cdot\,)$ definiert wie in 1.3.45.

(a) Zeigen Sie, dass $+,\,\cdot:\mathsf{C}\times\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{C}$ kommutativ sind, d. h. dass gilt

$$(x,\,y)+(u,\,v)=(u,\,v)+(x,\,y), \qquad (x,\,y)\cdot(u,\,v)=(u,\,v)\cdot(x,\,y), \qquad (x,\,y),\ (u,\,v)\in\mathsf{C}.$$

(b) Zeigen Sie, dass $(0,\,0)\in\mathsf{C}$ bzw. $(1,\,0)\in\mathsf{C}$ die neutralen Elemente bzgl. $+$ bzw. $\cdot$ sind.

(c) Zeigen Sie, dass das multiplikativ Inverse für $(x,\,y)\in\mathsf{C}\setminus\{\,(0,\,0)\,\}$ gegeben ist als

$$(x,\,y)^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ -\frac{y}{x^2+y^2}\right)\in\mathsf{C}.$$

Aufgabe 5.4: (Komplexe Zahlen: Unmöglichkeit der Ordnung)
Der Körper $(\mathsf{C},\,+,\,\cdot\,)$ sei definiert wie in 1.3.45. Zeigen Sie, dass es keine Ordnung $\sqsubseteq$ auf C gibt, so dass $(\mathsf{C},\,+,\,\cdot\,,\,\sqsubseteq)$ ein geordneter Körper ist.

Hinweis: Beachten Sie Proposition 1.3.6 und die Tatsache, dass $(0,\,1)^2=-(1,\,0)$.

Aufgabe 5.5: (Quadratische Polynome)
Seien $p,\,q\in\mathbb{R}$ und sei $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ gegeben als $f(x):=x^2+px+q$ für $x\in\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $p^2-4q\geq0$, dann ist $f(x)=(x-x_+)(x-x_-)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $x_\pm=\frac{1}{2}(-p\pm\sqrt{p^2-4q})$.

(b) Ist $p^2-4q\leq0$, dann ist $f(x)=(x-z_+)(x-z_-)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $z_\pm=\frac{1}{2}(-p\pm i\sqrt{4q-p^2})$.