Analysis I
Sommersemester 2021
Übungsblatt 6

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Di., 25.05.2021, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 01.06.2021, 16:20 Uhr
Besprechung:	Mi., 02.06.2021

Ⓑ **Aufgabe 6.1:** (Folgen und Grenzwerte, $2+2+2+2+2+2$ Punkte)
Untersuchen Sie die Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ jeweils auf Konvergenz und geben Sie ggf. den Grenzwert an für

(a) $z_k := \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$,
(b) $z_k := \frac{2^k+(-3)^k}{(-2)^k+3^k}$,
(c) $z_k := \frac{k^2}{k^2+2k+2}$,
(d) $z_k := \sqrt[k]{k}$,
(e) $z_k := \frac{i^k}{i+k^2}$,
(f) $z_k := \frac{i^k(1+k)}{(2+k)}$.

Hinweis: Betrachten Sie bei (d) die Folge $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ mit $w_k := z_k - 1$ für $k \in \mathbb{N}$, berechnen Sie $(1+w_k)^k = z_k^k = k$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes und schätzen Sie damit w_k nach oben ab. Sie können (ohne Beweis) verwenden, dass $(\frac{1}{\sqrt{k}})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Ⓑ **Aufgabe 6.2:** (Folgen und Grenzwerte, $2+2+4$ Punkte)
Seien $(z_k)_{k\in\mathbb{N}},\ (w_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ mit $w_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Aussagen

(a) $\lim_{k\to\infty}(z_k - w_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \frac{z_k}{w_k} = 1$,

(b) $\lim_{k\to\infty} \frac{z_k}{w_k} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty}(z_k - w_k) = 0$

falsch sind. Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen an $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sind diese Aussagen wahr?

Aufgabe 6.3: (Konvergenz des arithmetischen Mittels)
Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ konvergent gegen $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k \to z \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Hinweis: Sie können (ohne Beweis) die folgende Form der Dreiecksungleichung verwenden: Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ ist $|\sum_{k=1}^n a_k| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$.

Ⓑ **Aufgabe 6.4:** (Folgen und Grenzwerte, $2+2$ Punkte)
Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ konvergent gegen $z \in \mathbb{C}$ und sei $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ konvergent gegen $w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $z_k \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann ist $z \in \mathbb{R}$.

(b) Ist $w_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $w \neq 0$, dann ist $(\frac{z_k}{w_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $\frac{z}{w}$.

Hinweis: Sie können Proposition 2.1.13 (a)–(c), (e)–(g) verwenden, nicht aber Proposition 2.1.13 (d) und (h).

Aufgabe 6.5: (Bernoulli'sche Ungleichung)
Sei $x \geq -1$. Zeigen Sie, dass

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Argumentieren Sie mit Hilfe einer vollständigen Induktion (nach n).