Analysis I
Sommersemester 2021
Übungsblatt 7

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Di., 01.06.2021, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 08.06.2021, 16:20 Uhr
Besprechung:	Mi., 09.06.2021 bzw. Do., 10.06.2021

Ⓑ **Aufgabe 7.1:** (Folgen und Grenzwerte, $3+3+1+1$ Punkte)
Sei $z \in \mathbb{C}$ und $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ gegeben als $z_k := z^k$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$z_k \to 0 \text{ für } k \to \infty, \text{ falls } |z| < 1, \qquad \text{und} \qquad |z_k| \to \infty \text{ für } k \to \infty, \text{ falls } |z| > 1.$$

Geben Sie jeweils ein Beispiel an für ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, so dass $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert bzw. divergiert.

Hinweis: Im Fall $|z| < 1$ ist $\frac{1}{|z|} = 1 + h$ mit $h > 0$ und im Fall $|z| > 1$ ist $|z| = 1 + h$ mit $h > 0$. Nutzen Sie die Bernoulli'sche Ungleichung.

Ⓑ **Aufgabe 7.2:** (Folgen und Grenzwerte, 6 Punkte)
Seien $a > 0$ und $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $0 < x_1 < \frac{1}{a}$. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ rekursiv definiert durch $x_{k+1} := 2x_k - ax_k^2$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Hinweis: Untersuchen Sie die Folge zunächst auf Beschränktheit und Monotonie.

Aufgabe 7.3: (Divergenz gegen $\pm\infty$)
Geben Sie in jedem der folgenden Fälle ein Beispiel an für Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}},\ (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, die die angegebenen Eigenschaften haben.

(a) $x_k \to -\infty$ und $y_k \to \infty$ für $k \to \infty$, während

  (i) $x_k + y_k \to -\infty$ für $k \to \infty$,
  (ii) $x_k + y_k \to 0$ für $k \to \infty$,
  (iii) $x_k + y_k \to \infty$ für $k \to \infty$.

(b) $x_k \to \infty$ und $y_k \to 0$ für $k \to \infty$, während

  (i) $x_k y_k \to 0$ für $k \to \infty$,
  (ii) $x_k y_k \to 1$ für $k \to \infty$,
  (iii) $x_k y_k \to \infty$ für $k \to \infty$.

Ⓑ **Aufgabe 7.4:** (Limes inferior und Limes superior, $4+4$ Punkte)
Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}},\ (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und $x_* := \liminf_{k\to\infty} x_k \in \bar{\mathbb{R}}$, $x^* := \limsup_{k\to\infty} x_k \in \bar{\mathbb{R}}$, $y_* := \liminf_{k\to\infty} y_k \in \bar{\mathbb{R}}$ sowie $y^* := \limsup_{k\to\infty} y_k \in \bar{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie:

(a) $x_* = \infty$ genau dann, wenn $x_k \to \infty$ für $k \to \infty$.

(b) Ist $(x_*,\, y_*) \notin \{\, (-\infty, \infty),\ (\infty, -\infty) \,\}$, dann gilt $\liminf_{k\to\infty}(x_k + y_k) \geq x_* + y_*$.

($\tilde{\text{b}}$) Ist $(x^*,\, y^*) \notin \{\, (-\infty, \infty),\ (\infty, -\infty) \,\}$, dann gilt $\limsup_{k\to\infty}(x_k + y_k) \leq x^* + y^*$.

Hierbei seien $\infty + a = \infty = a + \infty$ für $a \in \mathbb{R} \cup \{\, \infty \,\}$ und $(-\infty) + a = -\infty = a + (-\infty)$ für $a \in \mathbb{R} \cup \{\, -\infty \,\}$.

Sie müssen die Aussage (a) sowie genau eine der beiden Aussagen (b) bzw. ($\tilde{\text{b}}$) beweisen, um die volle Punktzahl bei dieser Aufgabe zu erhalten.

Aufgabe 7.5: (Konvergenzkriterien für Folgen)
Entscheiden Sie jeweils, ob die angegebene Eigenschaft die Konvergenz der Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ impliziert, für

(i) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, k_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \ \forall\, k \geq k_\varepsilon : \ |z_{k+1} - z_k| < \varepsilon,$

(ii) $\exists\, C > 0 \ \ \exists\, k_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall\, k \geq k_0 : \ |z_{k+1} - z_k| < C2^{-k}.$