Analysis I
Sommersemester 2021
Übungsblatt 8

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Di., 08.06.2021, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 15.06.2021, 16:20 Uhr
Besprechung:	Mi., 16.06.2021 bzw. Do., 17.06.2021

Ⓑ **Aufgabe 8.1:** (Reihen und Reihenwerte, $3+3$ Punkte)
Berechnen Sie jeweils den Wert der folgenden Reihen:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2^{n+k}}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^k}{3^k}.$$

Ⓑ **Aufgabe 8.2:** (Reihen und Konvergenz, $2+2+2+2+2+2$ Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_k (\sqrt[k]{a}-1)^k$, wobei $a > 0$, (b) $\sum_k \frac{k+4}{k^2-3k+7}$,

(c) $\sum_k \frac{(-1)^k k^3}{(k^2+1)^{4/3}}$, (d) $\sum_k (-1)^k\big(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\big)$,

(e) $\sum_k \frac{k!}{k^k}$, (f) $\sum_k \frac{k^4}{3^k}$.

Ⓑ **Aufgabe 8.3:** (Wurzel- und Quotientenkriterium, $1+1+1+1$ Punkte)
Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ gegeben als

$$z_k := \begin{cases} 2^{-k}, & \text{falls } k \text{ ungerade ist,} \\ 3^{-k}, & \text{falls } k \text{ gerade ist,} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie

$$\liminf_{k\to\infty}\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right|, \qquad \limsup_{k\to\infty}\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| \qquad \text{und} \qquad \limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|z_k|}.$$

Zeigen Sie, dass mit Hilfe des Quotientenkriteriums (Korollar 2.4.19 (a)) nicht entschieden werden kann, ob die Reihe $\sum_k z_k$ konvergiert oder divergiert. Entscheiden Sie mit Hilfe des Wurzelkriteriums (Korollar 2.4.19 (b)), ob die Reihe $\sum_k z_k$ konvergiert oder divergiert.

Aufgabe 8.4: (Cauchy-Produkt)
Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_k \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ bedingt konvergent ist. Bestimmen Sie das Cauchy-Produkt dieser Reihe mit sich selbst und zeigen Sie, dass dieses divergiert.

Hinweis: Für $(z_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(w_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C}$ ist das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum_k z_k$ und $\sum_k w_k$ gemäß Proposition 2.4.26 gegeben als die Reihe $\sum_n \sum_{k=0}^{n} z_{n-k}w_k$.