Analysis I
Sommersemester 2021
Übungsblatt 9

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Di., 15.06.2021, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 22.06.2021, 16:20 Uhr
Besprechung:	Mi., 23.06.2021 bzw. Do., 24.06.2021

Ⓑ **Aufgabe 9.1:** (Potenzreihen, $2+2+2+2$ Punkte)
Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(a)} \quad \sum\nolimits_k \frac{1}{k^k} z^k, \qquad \text{(b)} \quad \sum\nolimits_k \frac{1}{\sqrt{k!}} z^k,$$

$$\text{(c)} \quad \sum\nolimits_k (-1)^k \frac{k!}{k^k} z^k, \qquad \text{(d)} \quad \sum\nolimits_k \frac{k 2^k}{(1+k^2)^2} z^k.$$

Ⓑ **Aufgabe 9.2:** (Exponentialfunktion, $3+1$ Punkte)
Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sei gegeben wie in Definition 2.6.1. Zeigen Sie:

(a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$.

(b) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $|\exp(it)| = 1$.

Hinweis: Für $w \in \mathbb{C}$ ist $|w|^2 = w\bar{w}$. Sie können Proposition 2.6.3 (a) – (f) verwenden.

Ⓑ **Aufgabe 9.3:** (Trigonometrische und hyperbolische Funktionen, 4 Punkte)
Die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen cos, sin, cosh, sinh : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ seien gegeben wie in 2.6.6. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

(a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))$.

(b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $\sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$.

(c) Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $\cosh(z) = \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z))$.

(d) Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $\sinh(z) = \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z))$.

Sie müssen genau eine der Aussagen (a) – (d) beweisen, um die volle Punktzahl bei dieser Aufgabe zu erhalten.

Hinweis: Wenden Sie Theorem 2.5.5 auf die Potenzreihen an, die die rechte Seite definieren.

Ⓑ **Aufgabe 9.4:** (Trigonometrische und hyperbolische Funktionen, 4 Punkte)
Die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen cos, sin, cosh, sinh : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ seien gegeben wie in 2.6.6. Zeigen Sie die folgenden *Additionstheoreme*:

(a) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist $\cos(z \pm w) = \cos(z)\cos(w) \mp \sin(z)\sin(w)$.

(b) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist $\sin(z \pm w) = \sin(z)\cos(w) \pm \cos(z)\sin(w)$.

(c) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist $\cosh(z \pm w) = \cosh(z)\cosh(w) \pm \sinh(z)\sinh(w)$.

(d) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist $\sinh(z \pm w) = \sinh(z)\cosh(w) \pm \cosh(z)\sinh(w)$.

Sie müssen genau eine der Aussagen (a) – (d) beweisen, um die volle Punktzahl bei dieser Aufgabe zu erhalten.

Hinweis: Verwenden Sie die Identitäten aus Aufgabe 9.3 und die Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Aufgabe 9.5: (Stetigkeit)
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\}$ gegeben als $f(x) := 1$, falls $x \in \mathbb{Q}$, und $f(x) := 0$, falls $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ unstetig ist.

Hinweis: Verwenden Sie Proposition 1.3.53.