Analysis I
Sommersemester 2021
Übungsblatt 10

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Di., 22.06.2021, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 29.06.2021, 16:20 Uhr
Besprechung:	Mi., 30.06.2021 bzw. Do., 01.07.2021

Ⓑ **Aufgabe 10.1:** (ε-δ-Kriterium für (gleichmäßige) Stetigkeit, $3+3$ Punkte)
Seien $\varnothing \neq J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) f ist genau dann stetig an der Stelle $x \in J$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $y \in J$ mit $|y - x| < \delta$.

(b) f ist genau dann gleichmäßig stetig in J, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in J$ mit $|y - x| < \delta$.

Ⓑ **Aufgabe 10.2:** (Stetige Funktionen, $2+2$ Punkte)
Sei $\varnothing \neq J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeigen Sie:

(a) Ist $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv, dann ist f streng monoton.

(b) Ist $\varnothing \neq J' \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : J \longrightarrow J'$ stetig und invertierbar, dann ist $f^{-1} : J' \longrightarrow J$ stetig.

Ⓑ **Aufgabe 10.3:** (Funktionenfolgen, $3+3+2$ Punkte)
Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz für

(a) $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \frac{x^2}{1+(kx)^2}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$;

(b) $f_k : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \frac{k^2 x}{1+(kx)^2}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, 1]$;

(c) $f_k : [\frac{1}{2}, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \frac{k^2 x}{1+(kx)^2}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Ⓑ **Aufgabe 10.4:** (Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit, $2+2$ Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als $f(x) = \frac{x}{1+x}$ für $x \in (-1, 1)$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass f stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 10.5: (Stetigkeit)
Zeigen Sie (mit Hilfe der Definition über Folgen), dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{ 0 \}, \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit teilerfremden } p \in \mathbb{Z} \setminus \{ 0 \},\ q \in \mathbb{N}, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R},$$

in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist.

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstraß.