Analysis I
Sommersemester 2021
Übungsblatt 11

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Di., 29.06.2021, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 06.07.2021, 16:20 Uhr
Besprechung:	Mi., 07.07.2021 bzw. Do., 08.07.2021

Ⓑ **Aufgabe 11.1:** (Differenzierbarkeit und Ableitungen, $3 + 3$ Punkte)
Seien $f,\, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegen als

$$f(x) := \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad g(x) := \cos\big(\sin(x^2)\big), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass f und g differenzierbar sind, und bestimmen Sie die Ableitungen $f',\, g' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ⓑ **Aufgabe 11.2:** (Differenzierbarkeit und Ableitungen, 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (0,\, \infty) \longrightarrow (0,\, \infty)$ mit $f(x) := x^x$ für $x > 0$ stetig differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung $f' : (0,\, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ⓑ **Aufgabe 11.3:** (Differenzierbarkeit der Wurzel, 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion $\sqrt{\cdot} : [0,\, \infty) \longrightarrow [0,\, \infty)$ nicht differenzierbar ist an der Stelle $x = 0$.

Ⓑ **Aufgabe 11.4:** (Höhere Ableitungen, 6 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R},$$

beliebig oft differenzierbar ist, wobei für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom p_n vom Grad $2n$ existiert, so dass für alle $x > 0$ gilt: $f^{(n)}(x) = p_n(\frac{1}{x})f(x)$.

Bemerkung: Ist $\varnothing \neq J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar in J, so dass $f^{(1)} := f' : J \longrightarrow \mathbb{C}$ ebenfalls differenzierbar ist, dann heißt $f^{(2)} := f'' := (f')' : J \longrightarrow \mathbb{C}$ die zweite Ableitung von f in J. Rekursiv ist so für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die n-te Ableitung $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ definiert, falls $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass für jedes Polynom $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt: $\lim_{t\to\infty} p(t)e^{-t} = 0$.

Aufgabe 11.5: (Stetige Fortsetzung)
Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : (a,\, b) \longrightarrow \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass die Grenzwerte $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to b} f(x)$ existieren.