Analysis I
Sommersemester 2021
Übungsblatt 12

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 06.07.2021, 14:00 Uhr
Abgabe: Di., 13.07.2021, 16:20 Uhr
Besprechung: Mi., 14.07.2021 bzw. Do., 15.07.2021

Ⓑ **Aufgabe 12.1:** (Grenzwerte, $2+2+2+2+2+2$ Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - xe^{x/2} - 1}{x^2}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(\cos(3x))}{\log(\cos(2x))}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$ (e) $\lim\limits_{x\to\infty} x\Big(\log\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \log(x)\Big)$ (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(x)+2x}{\cos(x)-2x}$

Ⓑ **Aufgabe 12.2:** (Mittelwertsatz, $3+3$ Punkte)
Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differenzialrechnung, dass gilt:

(a) Für alle $x > 0$ ist $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$.

(b) Für alle $x,\, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ ist $e^x(y-x) < e^y - e^x < e^y(y-x)$.

Ⓑ **Aufgabe 12.3:** (Taylorreihe, 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (-1,\, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \log(1+x)$ für $x \in (-1,\, 1)$ beliebig oft differenzierbar ist und bestimmen Sie $f^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Taylorreihe von f um 0.

Hinweis: Die Taylorreihe von f um 0 ist die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Aufgabe 12.4: (Differenzierbarkeit und Analytizität)
Geben Sie eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ an, für die kein $r > 0$ existiert mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \qquad |x| < r,$$

obwohl die angegebene Potenzreihe für jedes $r > 0$ gleichmäßig in $(-r,\, r)$ konvergiert.

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 11.4.