Mathematisches Institut
der Universität Düsseldorf
Prof. Dr. H. Ratschek

SS 2004
16.06.2004
Blatt 8

Übungen zu Analysis II

27. (2P) Die Funktion $f : R^2 \to R$ sei definiert durch $f(0,0) = 0$ und $f(x,y) = x^3 \,/\, (x^2 + y^2)$ falls $(x,y) \neq (0,0)$ ist.

    Zeigen Sie, daß f in (0,0) nicht differenzierbar ist.

    Zeigen Sie, daß aber für jede differenzierbare Kurve $\varphi : J \to R^2$, die durch den Punkt $(0,0)$ führt, die Funktion $f \circ \varphi$ differenzierbar ist.

28. (3P) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : R^2 \to R$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^3/(x^2+y^2), & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} ,$$

    differenzierbar ist, und dass die partiellen Ableitungen $D_1 D_2 f$ und $D_2 D_1 f$ existieren, aber an der Stelle $(0,0)$ verschieden sind.

29. (3P) Eine Funktion $f \in C^2(U)$ mit $U \subset R^n$ offen heißt harmonisch, wenn sie $(\nabla \cdot \nabla) f = 0$ erfüllt. Welche der folgenden Funktionen sind harmonisch?

    (a) C^2-Funktionen f bzw. g, für die

$$D_1 f = -D_2 g \text{ und } D_2 f = D_1 g$$

    gilt $(n = 2)$?

    (b) Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to R$, definiert durch $f(x) = 1/|x|$ hinsichtlich der Euklidischen Norm?

    (c) Die Funktion $f(x,y) = \text{arctg}(y/x)$ für $x > 0, y \in R$?

30. (1) Sei $f : R^3 \to R$ aus der Klasse C^2 und gelte $f(tx) = t^2 f(x)$ für alle $t \in R,\ x \in R^3$. Man zeige

$$f(x) = \frac{(x \cdot \triangledown)^2 f(o)}{2!} \quad \text{für} \quad x \in R^3.$$

Abgabe: Mittwoch, 23.06.2004, 9.30 Uhr