Mathematisches Institut
der Universität Düsseldorf
Prof. Dr. H. Ratschek

SS 2004
23.06.2004
Blatt 9

Übungen zu Analysis II

31. (2P) Man zeige, dass $p_k(x) = \sum\limits_{|\lambda|=0}^{k} \frac{x^\lambda}{\lambda!}$ das Taylorpolynom vom Grade k mit Entwicklungspunkt o der Funktion $f(x) = e^{x_1+\ldots+x_n}$ ist. Schätzen Sie im Falle $n = 2$ den Fehler ab, der entsteht, wenn f in $[-1/2, 1/2]^2$ durch p_3 ersetzt wird.

32. (2P) Bestimmen Sie die Ableitungen an der Stelle x und ihre Matrizen für folgende Funktionen, ohne hierbei die Matrizen A in Teile oder ihre Elemente zu zerlegen

    (a) $f(x) = x^T A\, x + b^T x$ mit $A \in R^{n\times n}$ symmetrisch, $x,\ b \in R^{n\times 1}$,

    (b) $f(x) = y^T A\, z$ mit $A \in R^{m\times n},\ x^T = (y^T\ z^T),\ y \in R^{m\times 1},\ z \in R^{n\times 1}$.

33. (2P) Sei $U \subset R^n$ offen und $x \in U$. Eine Funktion $f : U \to R^m$ ist differenzierbar in x genau dann, wenn es eine Abbildung $A : U \to \mathrm{Hom}(R^n, R^m)$ so gibt, dass für alle $h \in R^n$ mit $x + h \in U$
$$f(x+h) = f(x) + (A(x+h))(h)$$
gilt und A in x stetig ist.

34. (2P) Die Funktionen $f : R^n \to R^n$ und $g_i : R \to R,\ i = 1, \ldots, n$, seien stetig differenzierbar. Ferner sei $h : R^n \to R^n$ definiert durch $h(x) = f[g_1(x_1), \ldots, g_n(x_n)]$. Man zeige:
$$\mathrm{Det}\Big(J_h(x)\Big) = \mathrm{Det}\Big(J_f(g_1(x_1), \ldots, g_n(x_n))\Big)\, g_1'(x_1) \cdot \ldots \cdot g_n'(x_n).$$

Abgabe: Mittwoch, 30.06.2004, 9.30 Uhr