

Übungen zu Analysis III

37. (1P) Seien $E, F \subset \mathbb{R}^n \times [a, b]$ meßbare Mengen, für die $\mu_n(E_y) = \mu_n(F_y)$ für alle $y \in [a, b]$ gilt. Dann gilt $\mu_{n+1}(E) = \mu_{n+1}(F)$.
38. (1P) Zeigen Sie, daß das Volumen des n -dimensionalen Ellipsoides mit den Hauptachsenlängen $2a_1, \dots, 2a_n$, das ist also die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1\}$, gleich $a_1 \cdot \dots \cdot a_n \alpha$ ist, wobei α das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel bedeute. (Hinweis: Stellen Sie eine geeignete Verbindung zwischen Kugel und Ellipsoid her).
39. Sei $E \subset \mathbb{R}^k$ ein meßbarer Bereich mit einer Massendichte $\rho : E \rightarrow \mathbb{R}$. Man nennt dann

$$M = \int_E \rho(x) dx$$

die Masse von E und, falls $M > 0$ ist,

$$S = \frac{1}{M} \int_E x \rho(x) dx$$

den Schwerpunkt von E .

Sei nun $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine affine invertierbare Abbildung. Zeigen Sie, daß E und φE die gleiche Masse haben (1P), und daß φE den Schwerpunkt $\varphi(S)$ hat (2P).

40. (2P) Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ die Kugel mit Radius r , Mittelpunkt 0 und der konstanten Massedichte ρ . Berechnen Sie den Schwerpunkt jenes Teils von B , der im positiven Oktanten des \mathbb{R}^3 liegt.

Abgabe: Mittwoch, 22.12.2004, 9.30 Uhr