Übungen zu Analysis III

45. Die Gamma-Funktion $\Gamma : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ wurde von Euler 1729 als uneigentliches Integral

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$$

und somit auch als Lebesque-Integral zur Interpolation der Fakultätenfunktion n! eingeführt. Man zeige:

(a) (1P) die Konvergenz des Integrals,
(b) (1P) $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)$ für $t \in \mathbb{R}^{>0}$,
(c) (1P) $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$,
(d) (1P) Die Gamma-Funktion ist aus C^∞.

(Hinweis: Man untersuche das Integral $\int_0^\infty e^{-kx}\, dx$ für $k \in \mathbb{R}^{>0}$.)

46. (2P) Sei $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ stetig auf der kompakten Menge $A \subset \mathbb{R}^k$. Sei $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Dirac-Folge auf $\mathbb{R}^k$ mit schrumpfendem Träger. (D. h. alle δ_n sind stetig, haben nichtnegative Funktionswerte und $\int \delta_n = 1$ für alle n. Ferner haben die δ_n kompakte Träger Supp_n und es gilt $(\mathrm{Supp}_n) \searrow \{0\}$.) Zeigen Sie, daß die Folge $(\delta_n * f)$ auf A gleichmäßig gegen f konvergiert.

47. Sei f die charakteristische Funktion des Intervalls $[-1, 1]$ und $g = f * f$. Zeigen Sie

(a) (2P) $g(x) = \max\{0, 2 - |x|\}$,
(b) (1P) $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin\xi}{\xi}$ mit $\frac{\sin 0}{0} = 1$,
(c) (1P) $\widehat{g}(\xi) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ (\frac{\sin\xi}{\xi})^2$,
(d) (1P) Wenden Sie auf g die Umkehrformel an um

$$\int (\frac{\sin x}{x})^2 dx = \pi$$

abzuleiten.

Abgabe: Mittwoch, 19.01.2005, 9.30 Uhr