Mathematisches Institut
der Universität Düsseldorf
Prof. Dr. H. Ratschek

WS 2004/2005
19.01.2005
Blatt 13

Übungen zu Analysis III

48. (a) (3P) Seien $M_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\ dx_j \in \Lambda^1 \mathbb{R}^n$ für $i = 1, ..., p$ und

$$A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,...,p \\ j=1,...,n}}$$

Zeigen Sie
$M_1 \wedge ... \wedge M_p = \sum_{[i]} \mathrm{Det}(A^T)_i dx_i$ (mit p-Multiindices i).
(Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis zu § 1, Beisp. 3).

(b) (1P) Sei $\varphi : U \to V$ stetig differenzierbar mit $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\omega \in \Omega^k(V)$. Zeigen Sie für $k \geq 1$:
$\varphi^*\omega = \sum_{[i],[j]} (\omega_i \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} du_j$ (mit k-Multiindices i, j).

49. (2P) Sei φ die durch $x = r \cos\alpha \cos\beta$, $y = r \cos\alpha \sin\beta$, $z = r \sin\alpha$ definierte Koordinatentransformation (mit festem $r > 0$). Berechnen Sie $\varphi^* dx$, $\varphi^* dy$, $\varphi^* dz$, $\varphi^* dx \wedge dy$, $\varphi^* dx \wedge dz$, $\varphi^* dy \wedge dz$ und $\varphi^* dx \wedge dy \wedge dz$.

50. (2P) Berechnen Sie das Integral $\int_S \omega$ für die 3-Form $z^2 dx \wedge dy \wedge dz$ und den im Halbraum $y \geq 0$ liegenden Teil der Einheitskugel.

51. Ist S^1 die Einheitskreislinie in $\mathbb{R}^2$, heißt $T = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ flacher Torus. Sei ferner $w(x) = x_2 x_4 dx_1 \wedge dx_3 + x_2 x_3 dx_4 \wedge dx_1 + x_1 x_4 dx_3 \wedge dx_2 + x_1 x_3 dx_2 \wedge dx_4$. Berechnen Sie

(a) (2P) $\int_T w$,

(b) (2P) den 2-dimensionalen Flächeninhalt von T.

Abgabe: 26.01.2005, 9.30 Uhr