Mathematisches Institut
der Universität Düsseldorf
PROF. DR. H. RATSCHEK

WS 2004/2005
24.11.2004
Blatt 7

Übungen zu Analysis III

25. (3P) Sei $f : \mathbb{R}^k \to [0, \infty]$ meßbar. Zeigen Sie, daß auch

$$\nu : \mathfrak{M}_k \to [0, \infty], \ E \mapsto \int\limits_E f \ d\mu,$$

ein Maß ist. (Es heißt Maß mit der Dichte f bzgl. des L-Maßes μ und wird auch mit $f\mu$ bezeichnet.)

Ist $f\mu$ translationsinvariant? Ist $f\mu$ ein vollständiges Maß auf $\mathfrak{M}_k$?

26. (4P) Ist f über A integrierbar?

(a) $A = [0, 1], \ f(x) = x^{-1/4} \log x,$

(b) $A = \mathbb{R}^{\geq 0}, \ f(x) = p(x)e^{-x}$ mit einem Polynom p.

Berechnen Sie die folgenden L-Integrale $\int\limits_A f$, wenn sie existieren:

(a) $A = \mathbb{R}, \ f(x) = e^{-|x|},$

(b) $A = \mathbb{R}^{\leq 0}, \ f(x) = (-1 - x)e^x.$

27. (2P) (Ein Mittelwertsatz für Integrale) Sei $A \subset \mathbb{R}^k$ kompakt und (weg-) zusammenhängend. Ferner seien $f : A \to \mathbb{R}$ stetig und $g : A \to \bar{R}^{\geq 0}$ L-integrierbar. Dann existiert ein Vektor $\xi \in A$ mit $\int\limits_A fg = f(\xi) \int\limits_A g$.

28. (2P) Zeigen Sie, daß die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{\pi}{x^2} & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zwar eine Stammfunktion besitzt (1P), aber über $[0, 1]$ nicht L-integrierbar ist (1P).

(Hinweis: Studieren Sie den Ausdruck $x^2 \cos \frac{\pi}{x^2}$.)

Abgabe: Mittwoch, 01.12.2004, 9.30 Uhr