Mathematisches Institut
der Universität Düsseldorf
Prof. Dr. H. Ratschek

WS 2004/2005
01.12.2004
Blatt 8

Übungen zu Analysis III

29. (a) (3P) Zeigen Sie, daß der Wert des Integrals $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$ gleich $\sqrt{\pi}/2$ ist, indem Sie das Integral $\int\limits_{\mathbb{R}^2} ye^{-(1+x^2)y^2}d(x,y)$ zweimal (Vertauschung der Integrationsreihenfolge) mit Fubini soweit als möglich berechnen und die Ergebnisse gleichsetzen.

    (b) (1P) Zu den wichtigsten Integralen in der Wahrscheinlichkeitstheorie zählt $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})dx = 1$, wobei $\sigma > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ ist.
    Der Integrand hierbei ist die Dichte der Gaußschen Normalverteilung mit μ als Erwartungswert und σ als Standardabweichung.

30. (1P) Seien $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ und $h : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar, und sei $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert durch
$$f(x,y) = g(x)h(y) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m.$$
Dann ist f integrierbar, und es gilt
$$\int f = (\int g) \int h.$$

31. (2P) Man berechne das Volumen des Körpers
$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ |x|+|y|+|z| \leq 2, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}.$$

32. (3P) Sei $I = [-1,1]$ und $f : I^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x,y) = \begin{cases} xy/(x^2+y^2)^2 & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$
Man zeige, daß f nicht integrierbar ist, daß aber
$$\int\limits_I \left[\int\limits_I f(x,y)dy\right] dx = \int\limits_I \left[\int\limits_I f(x,y)dx\right] dy$$
gilt.

Abgabe: Mittwoch, 08.12.2004, 9.30 Uhr

Mit der Besprechung dieses Übungsblattes enden die Übungen zum Teil 1 der Analysis III-Vorlesung im Pflichtmodul "Analysis" des Bachelor-Studienganges in Mathematik.