

## Übungen zu Analysis IV

5. (4P) Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum und  $M \subset X$ . Zeigen Sie:
- (a)  $(X, \mathcal{O}_M)$  ist ein topologischer Raum.
  - (b) Es ist  $S \subset M$  abgeschlossen in  $M$  genau dann, wenn es eine abgeschlossene Menge  $A \subset X$  mit  $S = A \cap M$  gibt.
  - (c) Sei  $M$  offen [abgeschlossen]. Dann ist  $S \subset M$  offen [abgeschlossen] in  $M$  genau dann, wenn  $S$  offen [abgeschlossen] in  $X$  ist.
6. Seien  $E, F$  normierte Räume und  $M \subset E, N \subset F$ . Zeigen Sie:
- (a) (1P)  $S$  ist offen in  $M$  genau dann wenn zu jedem  $x \in S$  eine Umgebung  $U_\varepsilon(x)$  mit  $U_\varepsilon(x) \cap M \subset S$  existiert.
  - (b) (2P) Die Abbildung  $f : M \rightarrow N$  ist stetig genau dann, wenn für jede in  $N$  offene Menge  $V$  das Urbild  $f^{-1}(V)$  offen in  $M$  ist.
7. Sei  $E$  ein normierter Raum und  $S \subset M \subset E$ .
- (a) (2P) Definieren Sie in geeigneter Weise Begriffe wie Berührungspunkt von  $S$  in  $M$ , Rand(punkt) von  $S$  in  $M$ , abgeschlossene Hülle von  $S$  in  $M$ , innerer Punkt von  $S$  in  $M$ ,  $S$  ist kompakt in  $M$ .
  - (b) (1P) Zeigen Sie, daß  $S$  offen in  $M$  genau dann ist, wenn alle Punkte aus  $S$  relativ innere Punkte sind.
8. (1P) Sei  $E$  ein normierter Raum und  $W_1, W_2 \subset E$ . Ferner sei  $\tau : W_1 \rightarrow W_2$  stetig. Zeigen Sie, wenn  $x \in W_1$  Randpunkt von  $W_1$  ist, ist  $\tau(x) \in W_2$  Randpunkt von  $W_2$ .
- (a) Finden Sie ein Gegenbeispiel für diese Aufgabenstellung.
  - (b) Verwenden Sie für  $\tau$  die Abbildung aus Hilfsatz 8, d. h.  $\tau = f_2^{-1} \circ f_1$ .

**Abgabe:** Mittwoch, 04.05.2005, 11.00 Uhr.

Benutzen Sie für die Bearbeitung der Aufgaben die in der Vorlesung verwendeten Definitionen.

Hinweis für Bachelorstudenten:

Dieses Übungsblatt setzt keine Kenntnisse von Analysis III, Teil 2 voraus.