Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. R. W. Braun

SS 2005
25.05.2005
Blatt 6

Übungen zu Analysis IV

21. (1P) Geben Sie eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ an, so dass $(\sin(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist. (Wegen des Satzes von Liouville ist klar, dass der komplexe Sinus unbeschränkt ist. Die Aufgabe besteht darin, eine konkrete Folge anzugeben.)
Zusatz: Sie erhalten einen Sonderpunkt, wenn Sie die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so wählen, dass
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(|\sin(z_n)|)}{|z_n|}$$
maximal ist, und einen weiteren Sonderpunkt, wenn Sie die Maximalität beweisen.

22. (4P)(Maximumprinzip für Kreisscheiben) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und es sei $B := U_r(z_0)$ eine offene Kreisscheibe mit $\overline{B} \subset U$. Gegeben sei ferner eine holomorphe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$.
    (a) Zeigen Sie, dass es ein konvexes Gebiet U_1 gibt mit $\overline{B} \subset U_1 \subset U$.
    (b) Verwenden Sie ähnlich wie im Beweis des Cauchyschen Abschätzungssatzes die Cauchysche Integralformel für konvexe Gebiete, um zu zeigen
    $$|f(z)| \le \frac{r}{r-|z|}\|f\|_{\partial B} \quad \text{für alle } z \in B.$$
    (c) Zeigen Sie
    $$|f(z)| \le \|f\|_{\partial B} \quad \text{für alle } z \in B.$$
    Wenden Sie dazu den Teil (b) auf alle Potenzen f^k, $k \in \mathbb{N}$, an.
    Bemerkung: Dieser schöne Trick stammt von Landau.

23. (1P) Seien $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\sigma\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ zwei geschlossene Wege mit $\gamma(a) = \sigma(c)$. Definieren Sie den zusammengesetzten Weg $\rho\colon [0,(b-a)+(d-c)] \to \mathbb{C}$ durch
$$\rho(t) = \begin{cases} \gamma(a+t), & 0 \le t < b-a, \\ \sigma(c+t-(b-a)), & b-a \le t \le (b-a)+(d-c). \end{cases}$$
Zeigen Sie für jedes $z \notin \operatorname{Bild}\rho$:
$$\operatorname{Ind}_\rho(z) = \operatorname{Ind}_\gamma(z) + \operatorname{Ind}_\sigma(z).$$

24. (2P) Es sei $R > 0$ und es sei $U = \mathbb{C} \setminus \overline{U_R(0)}$. Zeigen Sie: In U sind $\partial U_{2R}(0)^+$ und $\partial U_{3R}(0)^+$ homolog.

Abgabe: Mittwoch, 01.06.2005, 11:15 Uhr.