Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. R. W. Braun

SS 2005
01.06.2005
Blatt 7

Übungen zu Analysis IV

25. (a) (2P) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Die Zahl R sei so gewählt, dass $|z| < R$ für alle $z \in G$. Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus G$ gebe es einen Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus G$ mit $\gamma(a) = z$ und $|\gamma(b)| = R$. Zeigen Sie, dass G einfach zusammenhängend ist.
    (b) (1P) Geben Sie zwei Gebiete $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ an, so dass $G_1 \cup G_2$ wegzusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend ist.

26. (2P) Berechnen Sie
$$\int_{\partial U_1(\pi)^+} \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^{10}} dz.$$
Hinweis: Verwenden Sie die Cauchysche Integralformel (Satz 11).

27. (2P) Es sei $H = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und es sei $\log\colon H \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des komplexen Logarithmus. Ferner sei $G = \mathbb{C} \setminus \{ti : t \leq 0\}$. Zeigen Sie, dass auf G ein Zweig f des komplexen Logarithmus mit $f(1) = 0$ existiert. Bestimmen Sie die Wegzusammenhangskomponenten von $G \cap H$ und geben Sie zu jeder Wegzusammenhangskomponente U die Zahl $m \in \mathbb{Z}$ an, für die $f(z) = \log(z) + 2\pi i m$ für alle $z \in U$.

28. Es sei $H = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und es sei $\log\colon H \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des komplexen Logarithmus.
    (a) (1P) Skizzieren Sie für $\theta \in (0, \pi]$ die Menge
$$G_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \log(z)| < \theta\}.$$
    (b) (2P) Bestimmen Sie alle $\theta \in (0, \pi]$, für die gilt
$$z, w \in G_\theta \Rightarrow \big(zw \in H \text{ und } \log(zw) = \log(z) + \log(w)\big).$$
Hinweis: $z \mapsto \log(zw) - \log(w)$ ist auf seinem Definitionsbereich ein Zweig des komplexen Logarithmus.

Abgabe: Mittwoch, 15.06.2005, 11:15 Uhr.